د. مجيد الكرخي

# التحليل الكمي الاقتصادي

1

## العلاقات الخطية

بسم الـلـه الرحمن الرحيم

# التحليل الكمي

# الاقتصادي

الجزء الاول

العلاقات الخطية

الطبعة الأولى

١٤٣٤هـ - ٢٠١٤م





دار المناهج للنشر والتوزيع

عمان، شارع الملك حسين، بناية الشركة المتحدة للتأمين

هاتف4650624 465 فاكس 4650664 6 9626+

ص.ب 215308 عمان 11122 الأردن

**Dar Al-Manahej**
Publishers & Distributor

Amman-King Hussein St.
Tel 4650624 fax +9626 4650664
P.O.Box: 215308 Amman 11122 Jordan
**www.daralmanahej.com**
info@daralmanahej.com
manahej9@hotmail.com

# التحليل الكمـي الاقتصادي

## الجزء الاول

## العلاقات الخطية

تأليف

د. مجيد الكرخي

المملكة الأردنية الهاشيمة
رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية ٢٠٠٩/١٠/٤٤٧٨
٣٣٠,١
**الكرخي مجيد جعفر /التحيل الكمي الاقتصادي /مجيد جعفر الكرخي**
عمان دار المناهج للنشر والتوزيع 2010
ر .إ ٢٠٠٩/١٠/٤٤٧٨
الواصفات: الاقتصاد / التحليل الكمي

# المحتويات

## الفصل الثالث

## المصفوفات الجبرية

## الفصل الرابع

## تحليل المستخدم - المنتج



## الفصل الخامس

## البرمجة الخطية

## الفصل السادس

## استخدام البرمجة الخطيـــة

## في التخطيط أو اتخاذ القرارات



## الفصل السابع

## معالجات خاصة في البرمجـة الخطيـة

# مقدمة

تقدم التحليلات الكمية لمجمل الظواهر الاقتصادية وصفاً دقيقاً للمشكلة إذا ما أحكمت متطلباتها ابتداءً من مضبوطية البيانات المستخدمة وصولاً إلى حسن الأسلوب التحليلي ومن ثم مدى قدرة متخذ القرارات في توظيف الاستنتاجات المستخلصة .

لقد برزت أهمية التحليلات الكمية في علم الاقتصاد منذ بضعة قرون ولكنها تبلورت وتعمقت خلال القرن الماضي وخاصة الرياضية والإحصائية منها ولهذا صار من الضروري على دارسي علم الاقتصاد والمهتمين بالشؤون الاقتصادية إيلاء التحليلات الكمية المذكورة اهتماماً خاصاً حيث لم تعد المقالات الوصفية البحتة التي تقوم على سرد غير موثق بالمعلومات والوسائل الكمية قادرة على الإحاطة بطبيعة الظاهرة وعناصرها وقوانين حركتها تمهيدا لمعرفة اتجاهاتها والمؤثرات التي تتحكم بها.

وقد حاولنا في هذا الكتاب أن نقدم شيئا من التحليلات الكمية الاقتصادية بأسلوبها الرياضي المبسط ومن هنا جاءت تسمية الكتاب (بالتحليل الكمي الاقتصادي) تلك التسمية التي اشتقت من (الكم ولكمية )والتي تعني كما يفهمها القارئ الكريم استخدام الشروح الكمية (الرياضية ) للعلاقات والتشابكات الاقتصادية سواء ما يتعلق بها بالاقتصاد الكلي أو الاقتصاد الجزئي .. ولم تكن أمامنا فرصة التوسع الكثير في هذا المجال لان الوسيلة والغاية كانتا متلازمتين عند دراسة موضوع كهذا فلم نتمكن الدخول إلى التكميم مباشرة بسبب الحاجة لاستكمال جوانب من

المعرفة الرياضية لدى البعض من الإداريين والباحثين المبتدئين كما لم نتمكن من الأطناب في شرح التحليلات الرياضية البحثية خوفا من تحول الموضوع إلى كتاب في الرياضيات ولهذا سعينا التوفق بين الحاجتين والموازنة بينهما واعتمدنا أسلوب نتمنى أن يرضى القارئ وذلك باستعراض التحليل الرياضي أولا ومن ثم عرض التطبيقات الاقتصادية الكمية بعدئذ أي قدمنا الوسيلة الرياضية كي تكون مفهومة عند استخدامها في التكميم الاقتصادي اللاحق .

وقد حرصنا على أن تكون التحليلات الرياضية متدرجة فبدأنا بالمبادئ الأولية والعلاقات الخطية والتي شملت الدول الخطية والمصفوفات وجداول المستخدم المنتج والبرمجة الخطية والتي احتواها الجزء الأول من الكتاب أما العلاقات غير الخطية والتي شملت الدول غير الخطية ومبادئ التفاضل والتكامل والمعادلات التفاضلية ومعادلات الفروق فقد وضعت في الجزء الثاني .

والنقطة الأخرى التي راعيناها هي الابتعاد عن التحليلات الرياضية المعقدة والاتجاه نحو التبسيط والاستعانة بالشروحات التوضيحية الضرورية لخلق حالة الفهم التي يرجوها القارئ الذي لم يسبق له دراسة الرياضيات العامة كما لجأنا في سبيل تحقيق ذلك إلى مزيد من الأمثلة التي نراها الوسيلة الأكثر فائدة في تحقيق حالة الفهم المذكورة فهي إحدى وسائل التعلم عن طريق العمل التي أثبتت جداولها في المجالات التعليمية .

وبعد كل فصل رياضي عرضنا بعض القضايا الاقتصادية الأكثر شيوعا مستعينين في عرضها بالتحليلات الرياضية التي سبقتها وهكذا تصاعدت عملية العرض والتحليل فبدأنا بالعلاقات الاقتصادية البسيطة التي يمكن أن تشكل دالة خطية وبينا كيفية تمثيلها بالرسم البياني ومن ثم حلها رياضيا وصولا لتحديد الكميات الاقتصادية من

عرض وطلب وتكاليف وإنتاج واستهلاك وصادرات واستيراد ونقاط تعادل وغيرها . ثم انتقلنا بعدئذ إلى الدول الاقتصادية غير الخطية أو ما يسمى بالمنحنيات وهي الصورة الأخرى للدول الاقتصادية الخطية ومن ثم تعرضنا للتفاضل والتكامل وتطبيقاتهما في التحليلات الكمية الاقتصادية ذات العلاقة بالاقتصاد الكلي أو في نماذج النمو الاقتصادي وغيرها ، كذلك الحال بالنسبة لمعادلات الفروق التي استخدمت في عرض بعض النماذج الرياضية أيضا. أما المصفوفات الجبرية فقد استخدمت في تحليلات المستخدم - المنتج واستعمالاته في عرض التشابك الاقتصادي والتنبؤ في المتغيرات الاقتصادية الكلية في حسابات الدخل القومي كذلك استخدمت المصفوفات في شرح البرمجة الخطية وحلولها واستخداماتها الاقتصادية .

ونحن إذ تغمرنا السعادة في تقديمنا شيئا متواضعا في مجال الاقتصاد الكمي نشعر في نفس الوقت بأن هناك مجالات رحبة كثيرة في هذا الموضوع لم يسعفنا الحظ في التطرق إليها كما نلتمس العذر عن أي سهو أو خطأ حدث دون أن نلتفت إليه تاركين للقارئ اللبيب أمر تصحيحه وكم نكون ممتنين لو نبهنا عنه المكان تلافيه في الطبعات اللاحقة . شاكرين الـله سبحانه وتعالى الذي وفقنا على وضع هذا الكتاب فله الفضل كله وبه نستعين

المؤلف

# الفصل الأول

# بعض المفاهيم الأولية

## Some Elementary Concepts

# بعض المفاهيم الأولية

# Some Elementary Concepts

يحتوي هذا الفصل على استعراض سريع لبعض المفاهيم الأولية التي نعتقد أنها ضرورية لإطلاع القارئ المبتدئ في علم الرياضيات أو لتذكير من سبق له دراسة هذه المبادئ وذلك لكونها تشكل أساساً في فهم الشروحات والتحليلات الرياضية اللاحقة التي سترد في فصول الكتاب الأخرى.

## 1-1 أنواع الأعداد

**تقسم الأعداد إلى أنواع عديدة هي:**

أ- **مجموعة الأعداد الطبيعية**: وهي المجموعة التي تضم الأعداد الصحيحة الموجبة والصفر وتكتب كالآتي:

$$N=\{0,1,2,3,\ldots\} \qquad (1\text{-}1)$$

ب- **مجموعة الأعداد الصحيحة**: وهي المجموعة التي تضم جميع الأعداد الصحيحة السالبة والموجبة ومن ضمنها الصفر وتكتب بالصيغة آلاتية:

$$I=\{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\} \qquad (1\text{-}2)$$

ج- **مجموعة الأعداد النسبية**: وهي مجموعة الأعداد التي تكتب بصيغة كسر : $\frac{a}{b}$ حيث أن a, b عددان صحيحان و b≠0، ويظهر من صيغة هذه الأعداد انه يمكن أيجاد قيمتها بالضبط، كما أنها يمكن أن تكون موجبة أو سالبة وقد تكون عدداً صحيحاً كان في الأصل كسراً ونتيجة لقسمة البسط على المقام أصبحت عدداً صحيحاً مثل، $\frac{18}{3}=6$ . وتكتب الأعداد النسبية بصيغة المجموعات كالآتي:

$$R=\{\frac{a}{b}: a,b\in I, b\neq 0\} \qquad (1-3)$$

ومما يميز الأعداد النسبية أنه يمكن وضعها بصيغة كسر عشري غير منتهي وأن أرقام الجزء العشري تكرر نفسها على شكل مجاميع مثل ذلك:

$\frac{1}{6}=0.166666...$ حيث يلاحظ تكرار العدد 6، $\frac{8}{7}=1.1423571423\ 57$ تكرر العدد (142357) وهكذا.

ويتبين مما سبق أن مجموعة الأعداد النسبية R تحتوي على مجموعة الأعداد الصحيحة I، وأن مجموعة الأعداد الصحيحة I تحتوي على مجموعة الأعداد الطبيعية N. أي أن:

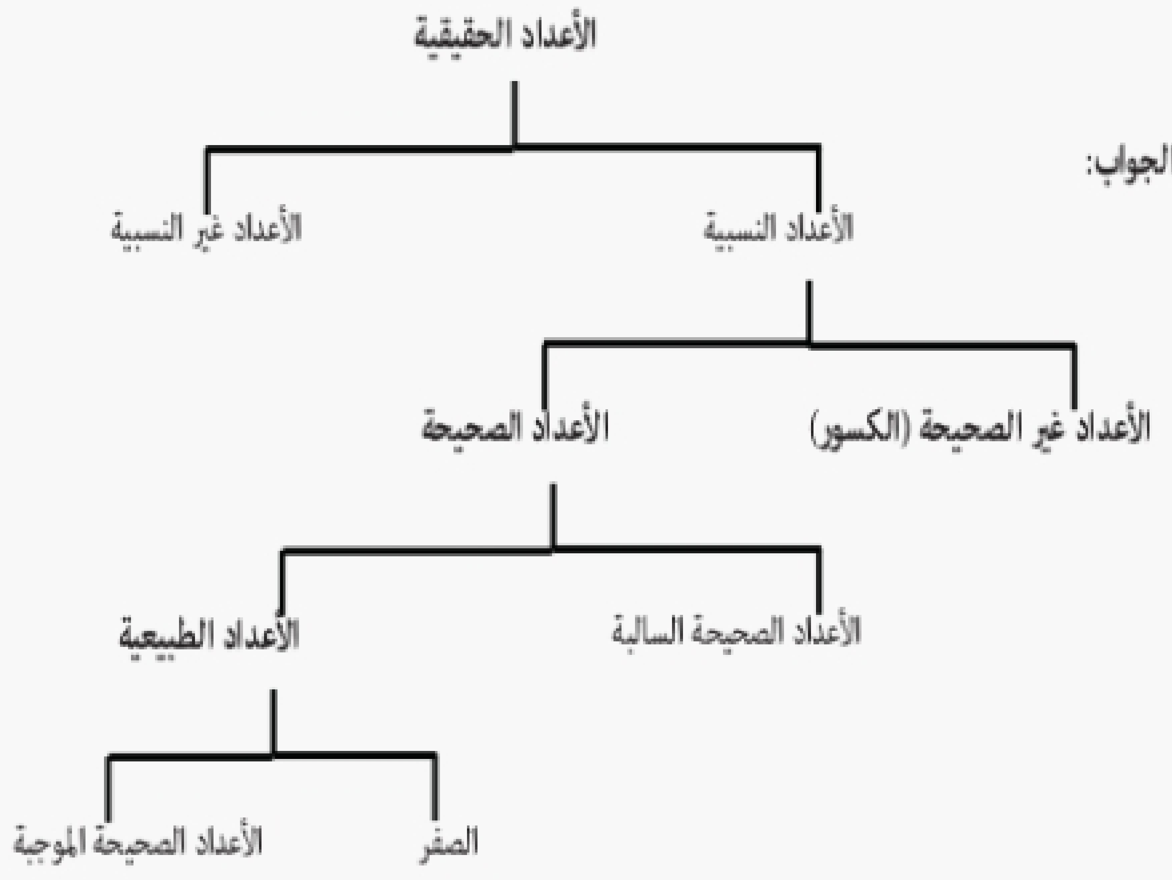
$$N \subseteq I \subseteq R \qquad (1\text{-}4)$$

وتقرأ N محتواة في I وI محتواة في R.

د- **مجموعة الأعداد غير النسبية**: وهي الأعداد التي لا يمكن وضعها على صورة أعداد نسبية ( أي على الصورة $\frac{a}{b}$ حيث أن: a,b عددان صحيحان، b≠0 ) غير أن كل من هذه الأعداد يقع بين عددين نسبيين. ويرمز لها بالحرف $R'$. مثال ذلك $\sqrt{2}=1.414213562...$ والنقاط (...) تعني استمرار الجزء العشري إلى ما لا نهاية، $\sqrt{\frac{3}{7}}=0.65465367...$، وهكذا ويلاحظ أن الجزء العشري لا يتكرر على شكل مجاميع من الأرقام وهذا ما يمكن التمييز به بين العدد النسبي وغير النسبي.

هـ- **مجموعة الأعداد الحقيقية**: وهي الأعداد التي تضم الأعداد النسبية وغير النسبية. وفي ضوء ما تقدم يمكن وضع المجموعات الجزئية للأعداد الحقيقة وفق المخطط الآتي:

الجواب:




و- **مجموعة الأعداد الخيالية**: وهي الأعداد التي تتضمن جذوراً زوجية لعدد سالب، فعند محاولة حل المعادلة الآتية $x^2+8=0$ نجد أن $x=\sqrt{-8}$ والنتيجة هي عدد حيث لا يمكن أيجاد جذر للعدد ( 8 -).وبصورة عامة يوضع العدد الخيالي حسب الصيغة الآتية:

العدد الخيالي =bi (1-5)

حيث يمثل b الجزء الحقيقي و i الجزء الخيالي من العدد الخيالي.

ولتوضيح ذلك نأخذ المثال الآتي:

مثال: استخرج الجذر التربيعي للعدد $(-144)$.

$$\sqrt{-144}=\sqrt{(-1)(144)}$$

$$=12\sqrt{-1}$$

$$\therefore bi=12\sqrt{-1}$$

ومن ذلك يظهر أن : b=12

و $i=\sqrt{-1}$

ز– **مجموعة الأعداد المركبة:** وهي التي يمكن وضعها بصيغة تجمع كلاً من العدد الحقيقي والعدد الخيالي معاً وكما مبين في الصيغة الآتية:

العدد المركب = a+bi (1-6)

حيث أن a,b أعداد حقيقية أما i فهي عدد خيالي = $\sqrt{-1}$. وأن الجزء a هو عدد حقيقي أما الجزء bi فهو عدد خيالي.

<u>مثال:</u>

حل المعادلة الآتية:

$$x-2x+5=0$$

<u>الجواب:</u>

تحل هذه المعادلة بموجب القانون.

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\times1\times5}}{2}$$

$$=\frac{2\pm\sqrt{-16}}{2}$$

$$=1\pm\frac{\sqrt{-16}}{2}$$

$$=1\pm\frac{\sqrt{(-1)(16)}}{2}$$

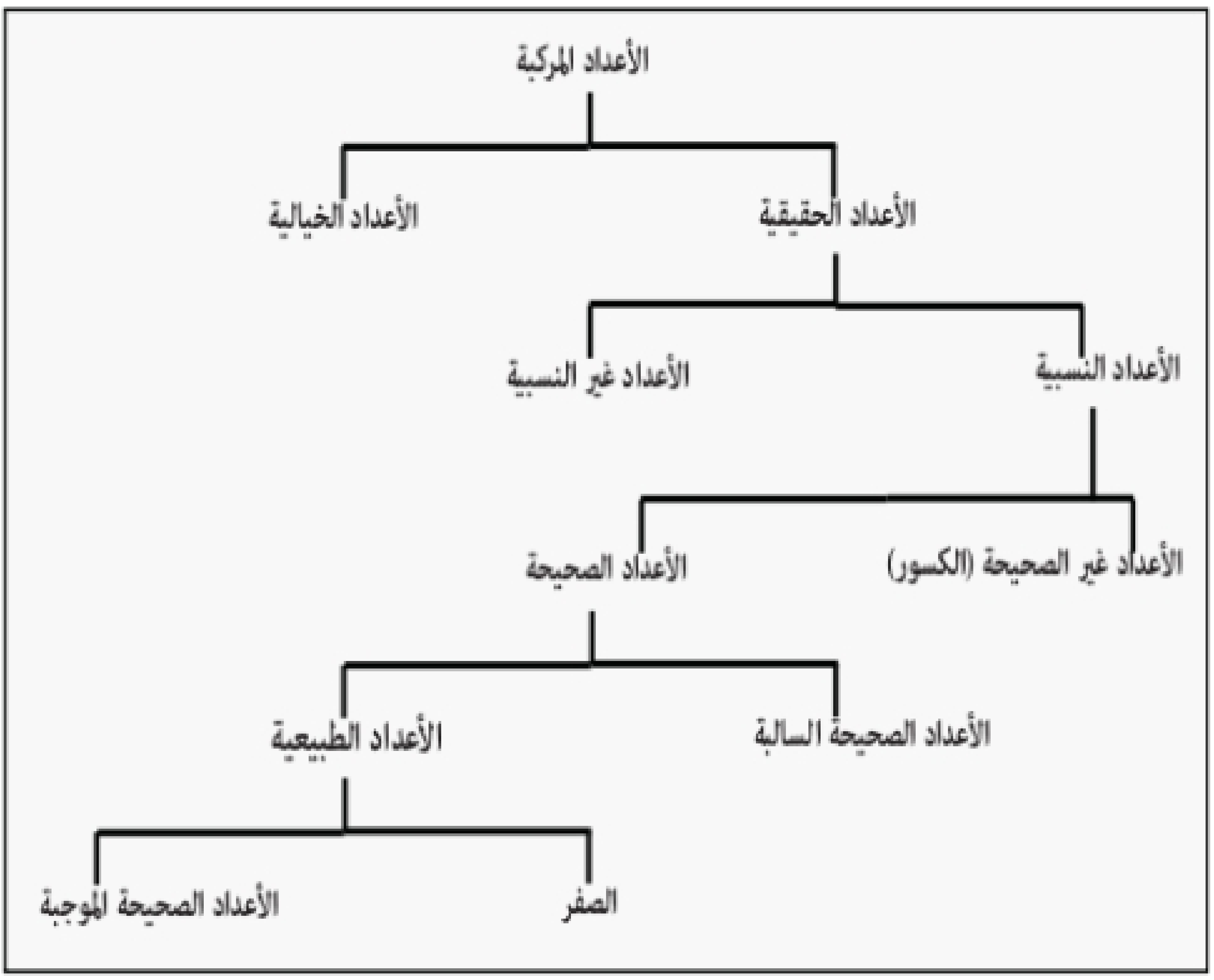
$$=1\pm\frac{4\sqrt{-1}}{2}=1\pm2\sqrt{-1}$$

وهنا تظهر صيغة العدد المركب $a+bi=1\pm2\sqrt{-1}$.

ومنها يتضح أن $a = 1$ وأن $bi = 2\sqrt{-1}$.

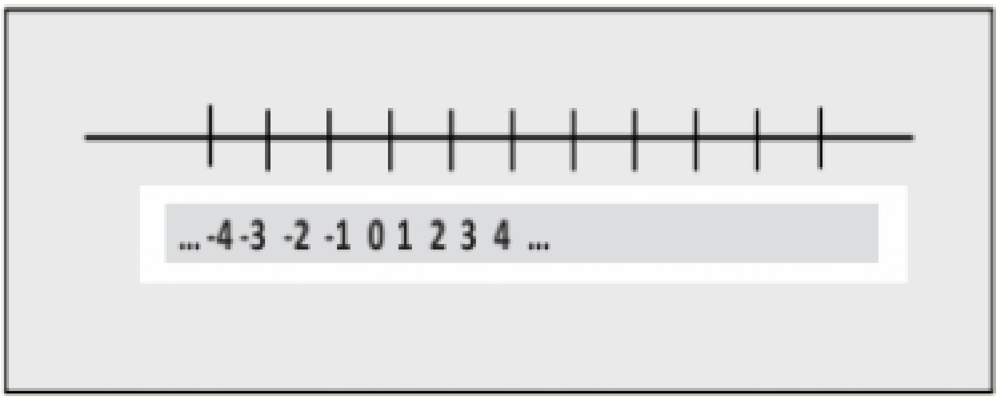
ويصبح العدد المركب عدداً حقيقياً إذا كانت $b = 0$ ويؤول إلى صيغة العدد الخيالي كاملة إذا كانت $a = 0$.

وعلى هذا الأساس يمكن أن نقول أن الأعداد المركبة تشمل الأعداد الحقيقية والأعداد الخيالية وبتوسيع المخطط السابق يصبح بالشكل الآتي:




## 1-2 خاصية الاتصال في الأعداد الحقيقية

إذا اعتبرنا أية وحدة من وحدات الطول هي وحدة لقياس الخط المستقيم واتفق على أن يكون الصفر هو نقطة الانطلاق (الأصل) أي النقطة التي تنطلق منها كل القياسات واتخذنا من الشكل ( 1-1 ) أساساً لتمثيل هذه الفرضية حيث يظهر لنا بأن جميع القيم الموجبة تقع على يمين نقطة الأصل والقيم السالبة في جهة اليسار مع الإشارة إلى أن اختيار الجهة اليمنى واليسرى للقيم الموجبة والسالبة هو محض اختيار اعتباطي حيث يمكن أن يكون العكس، وعلى هذا الأساس يفترض بالخط المستقيم أن يحتوي على:




الشكل رقم ( 1-1 )

1- وجود ما لانهاية من الأعداد النسبية تقع على الخط في كل فاصلة مسافة. مثال ذلك يوجد بين (0 ,1 ) العدد النسبي ( ½ ) وبين( 0, ½ ) هناك ¼ وبين (0 , ¼) هناك ( $\frac{1}{8}$ ) وهكذا.

2- وجود عدد غير نسبي على الأقل بين كل عددين نسبيين أي أن هناك كسر عشري غير منتهي وغير دوري. إن الجمع بين هاتين الفرضيتين يجعل من الخط الموضح في الشكل (1-1 ) أعلاه خطاً متراصاً لا ثغرة فيه أي انه خط متصل.

## 1-3 الإحداثيات المتعامدة



تحدثنا في الفقرة السابقة عن كيفية تمثيل الأعداد الحقيقية في خط، مادام هذا الخط متراصاً بهذه الأعداد لذلك يدعى بالخط الحقيقي أي الخط الذي يمثل الأعداد الحقيقية.

إن أية قطعة من خط من هذا النوع ما هي إلا مجموعة من نقاط حقيقية مختارة تجمعها صفة مشتركة هي قدرتها على أن تكون مستقيمة.

وإذا ما حددنا مجموعة من الأعداد على قطعة خط مستقيم فإننا نلاحظ عدم وجود حرية لبحث أي نوع من العلاقات بين اثنين أو أكثر من المتغيرات لان هذه العلاقات لا توجد إلا إذا تصورنا بان هناك مستوى هندسي معين أو أكثر ولتوضيح ذلك دعنا نأخذ المثال الآتي:-

إذا كانت زيادة معينة في متغير تؤدي إلى زيادة في متغير آخر حيث تنشأ علاقات زوجية في كل حالة بين هذين المتغيرين أي تتكون أزواج مرتبة من الأعداد على سبيل

المثال ( 2 , 3 ) و ( 4 , 6 ) و ( 6 , 9 ) .... الخ وإذا كان ( x ) يمثل الأعداد الأولى من كل زوج و ( y ) يمثل الأعداد الثانية منها فإن علاقة ( x , y ) تنشأ بين المتغيرين.

والصيغة ( x , y ) تبين لنا متغيرين على مستوى هندسي معين ، وكثيراً ما نحتاج إلى تمثيل العلاقات الاقتصادية التي توجد بين متغيرين أو أكثر وهنا يتطلب توفر مستوى هندسي أو أكثر لتمثيل هذه العلاقة.

وتعتبر الإحداثيات المتعامدة أكثر الطرق شيوعاً في هذا المجال وتسمى أحياناً بالإحداثيات الكرتيزية نسبة إلى أول من قال بها وهو رينيه ديكارت المولود في فرنسا سنة 1596 وملخصها عندما يشكل تقاطع مستقيمين زاوية قائمة يكون من الممكن استخدام هذين المستقيمين كمستقيمي علاقة، فإذا كانت لدينا نقطة فبالإمكان وضعها على المستوى الذي يقع عليه المستقيمان المتعامدان عن طريق قياس ورسم أبعاد النقطة المذكورة واتجاهاتها العمودية عن كل من المستقيمين.

إن هذين البعدين مع إشارتهما ( الموجبة أو السالبة ) التي توضح اتجاه كل منهما يسميان إحداثيا النقطة، أما المستقيمان المتعمدان فيسميان بالمحورين الإحداثيين وللاختصار بالمحورين وتدعى نقطة تقاطع المحورين بنقطة أصل الإحداثيين وللاختصار الأصل. ويقسم المحوران المستوى الهندسي إلى أربعة أقسام كل قسم يسمى ( الربع ) ترقم عكس دوران عقرب الساعة كما مؤشر في الشكل ( 1-2 ):

الشكل رقم ( 1-2 )

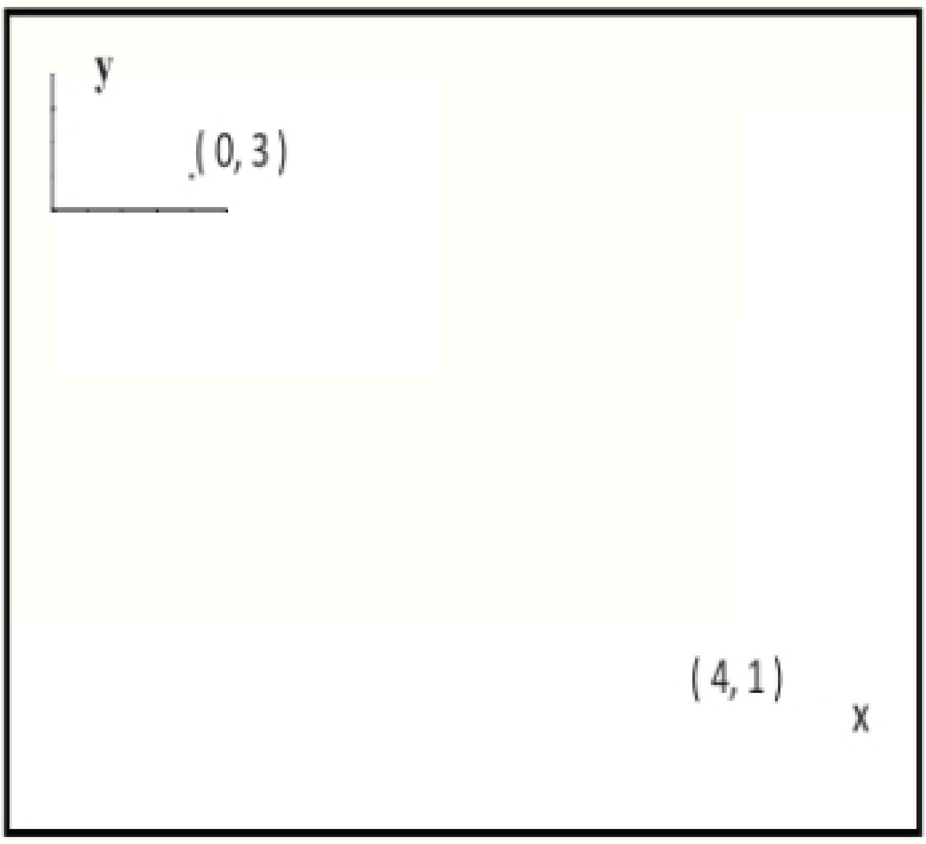
وبصورة عامة يدعى المحور الأفقي بالمحور السيني ( محور x ) والمحور العمودي بالمحور الصادي ( محور y ). وعادة ما تكون المسافات التي تقاس على يمين المحور( - x ) موجبة وعلى يساره سالبة والمسافات التي تقاس فوق المحور( - x ) موجبة وأسفله سالبة كما مبين في الشكل رقم ( 1.2 ). وتستخدم وحدة قياس واحدة لكل من (x , y ) أما في العلاقات التي يقاس فيها (x , y ) بوحدات مختلفة كان يكون ( x ) كميات الإنتاج مثلاً و( y ) مجموعة المبيعات فلابد من إيجاد وحدة قياس مناسبة لهما.

إن الإحداثي (- x ) أو المحور( x ) ( abscissa ) لنقطة معينة هو ذلك الإحداثي الذي يشير إلى اتجاه وبعد النقطة عن يمين أو يسار المحور - y . أما الإحداثي( - y ) أو المحور( y ) ( ordinate ) لنقطة هو ذلك الإحداثي الذي يشير إلى اتجاه وبعد النقطة عن أعلى أو أسفل المحور( - x ). ويشار إلى موقع النقطة بإحداثييها الاثنين معاً موضوعين بين قوسين بترتيب ( x , y ) أي ( الإحداثي - y و الإحداثي - x ). أما تعيين موقع النقطة بعد معرفة إحداثياتها فيسمى رسم ( تخطيط ) النقطة .

مثال ( 1 ):

ارسم بيانياً النقاط الآتية : ( 0 , 3 ) و ( 4 , 1 )

الجواب:




شكل رقم ( 1-3 )

**حيث أن موقع النقطة (x , y) يتحدد كالأتي:**

- **النقطة الأولى** : (x , y) = ( 0 , 3 ) وتبعد هذه النقطة عن الإحداثي y بمسافة قدرها ( 0 ) أي تقع عليه. وتبعد عن الإحداثي x بمسافة قدرها ( 3 ) باتجاه الأعلى . كما موضح في الشكل ( 1-3 ).
- **النقطة الثانية** : ( x , y ) = ( 4 , 1 ) وهذا يشير إلى أن هذه النقطة تبعد بمسافة ( 4 ) يميناً عن الإحداثي y وبمقدار ( 1 ) عن الإحداثي x باتجاه الأعلى وعند التقاء البعدين يتعين موقع النقطة كما مبين في الشكل أعلاه.

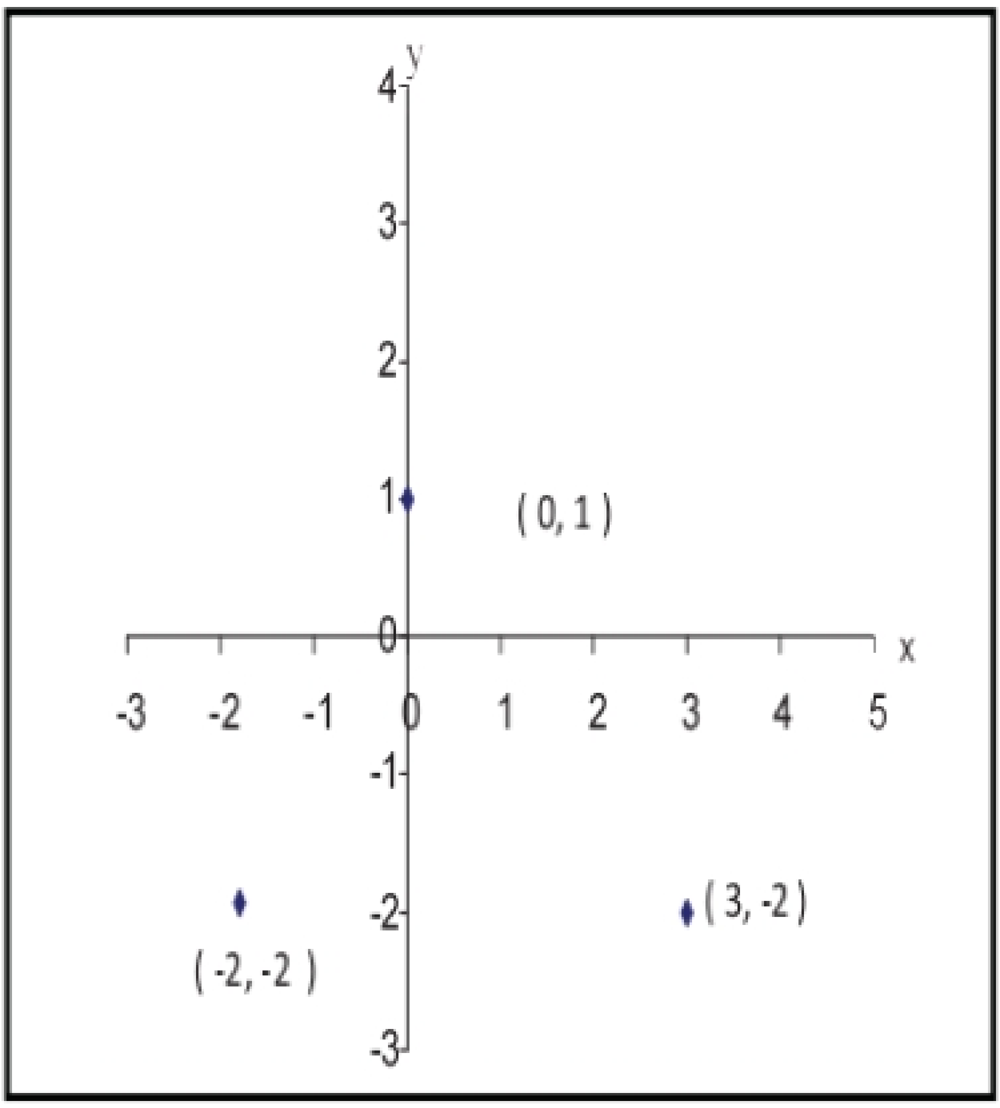
مثال ( 2 ):

ارسم بيانياً النقاط الآتية:

( 0,1 ) و ( -2 , -2 ) و ( 3,-2 )

الجواب :

بموجب الشروحات المبينة في المثال ( 1 ) يمكن تعين موقع النقاط أعلاه كما في الشكل الآتي:




شكل رقم( 1-4 )

### تمارين (1-1)

1- ارسم بيانياً النقاط الآتية على إحداثيات متعامدة: (1 , 0) و (3,0) و (2 , 5-).

2- عين موقع النقاط الآتية: ( 3-,2-) و (2-,0) و (0,0) و (1 , 1-).

3- عين موقع جميع النقاط التي بعدها x يساوي ( 3 ) .

4- ارسم النقاط (2 , y) إذا كانت y تمثل جميع النقاط الصحيحة غير السالبة المحصورة بين (0 , 8).

## 1-4 المتغيرات والثوابت : Variables and Constants

### 1-4-1 الثابت

وهو الكمية التي تبقى ثابتة في مسالة من المسائل. وهو على نوعين :

أ- **الثابت المطلق absolute constant**: وهو قيمة لا تتغير بل تبقى ثابتة رغم تبدل جميع المسائل مثل العدد: 12 , 918 , 1.517 ... الخ .

ب- **الثابت المعلمي (معلمة parameter)**: وهو الثابت الذي لا تتغير قيمته في مسألة معينة ولكن يمكن أن يأخذ قيما مختلفة في مسائل مختلفة. وتسمى المعلمة أحياناً بالثابت العشوائي ( الكيفي ).

### 1-4-2 المتغير

وهو الكمية التي تأخذ قيماً مختلفة في مسألة معينة. وان مجموعة القيم التي يأخذها المتغير تسمى مدى المتغير ( range ) ويقسم المتغير إلى نوعين:

أ- **المتغير المستمر Continuous** : ويراد به المتغير الذي يأخذ أية قيمة من الأرقام الحقيقية ضمن فاصلة مسافة معينة. ربما تكون جميع الأرقام الحقيقية مهما اختلفت وتناهت في الصغر خلال تتابعها المستمر.

<u>مثال:</u>

إذا كانت قيمة x تنحصر بين (4 , 6 ) أي أن : $6 > x > 4$ فإن جميع القيم التي تقع

في فاصلة المسافة المذكورة يمكن أن يأخذها المتغير x ، مثل (...4.1, 4.9, 5, 5.999 )، بحيث لا تبقى مسافة مهما كانت صغيرة لا يوجد فيها عدد حقيقي.

ب- **المتغير المنفصل (المتقطع discrete)**: وهو الذي يأخذ قيماً معينة في المدى القابل للعد ويقصد بالأعداد القابلة للعد في أي مدى : الأعداد الصحيحة، أما غيرها من النقاط (الأعداد) على أي خط مستقيم فهي متناهية وغير قابلة للعد. والآن لنأخذ مثالاً يوضح الثوابت والمتغيرات:

مثال ( 1 ):

في المعادلة الآتية:

$ax + by = 5$ يلاحظ أن: العدد ( 5 ) هو ثابت مطلق ( عددي ): و a , b هي معالم*. و x , y هي متغيرات .

مثال ( 2 ):

لاستخراج حجم المخروط نستخدم القانون الآتي : $M = \frac{1}{3} r\pi h$ حيث أن M يمثل حجم المخروط و ( r ) نصف قطر الدائرة ( قاعدة المخروط )، ( h ) ارتفاع المخروط وأن كل من، r و h متغيرات أما $\pi$ فهي النسبة الثابتة وتساوي تقريباً (3.14285) أي أن $\pi$ هو ثابت عددي إضافة إلى العدد ( $1/3$ ) .

## 1-5 العلاقات Relations

1-5-1 العلاقة

هي أية مجموعة من الأعداد المترتبة على شكل أزواج حيث تسمى بالعلاقة الثنائية - وتدعى الأعداد الأولى من العلاقة الثنائية بمجال العلاقة ( domain ) أما الأعداد الأخرى فتدعى بمدى العلاقة ( range ).

* لقد اخترنا كلمة ( معلمة ) كترجمة لكلمة ( parameter ) بالاستناد إلى لكثر الترجمات العربية شيوعا. راجع مثلا : المنظمة العربية للتربية والثقافة والعلم ( المعجم الموحد - معجم المصطلحات الرياضيات ، مطبعة المجمع العلمي العراقي ،1979، ص (53) .

فإذا كانت لدينا مجموعة من القيم الزوجية مثل ( x, y ) فإن المتغيرين ( x, y ) يمكن أن يأخذ كل منهما أية قيم وان مجموعة القيم التي يأخذها (x ) تشكل مجال العلاقة أما مجموعة القيم التي يأخذها ( y ) فتكون مدى العلاقة.

مثال:

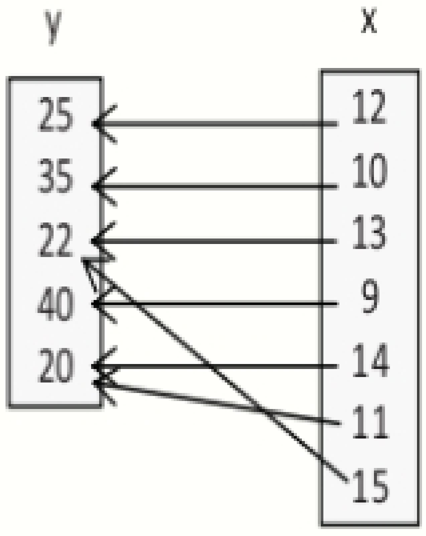
كانت العلاقة بين السعر ( x ) والكمية المباعة ( y ) في سوق معينة لفترة من الزمن كالآتي:

| السعر | 15 | 11 | 14 | 9 | 13 | 10 | 12 | x |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| الكمية المباعة | 22 | 20 | 20 | 40 | 22 | 35 | 25 | y |

**فإن هذه العلاقة يمكن كتابتها بصورة أزواج كالآتي:**

Q = (12,25),(10,35),(13,22),(9,40),(14,20),(11,20),(15,22)

**حيث يشير** Q **إلى رمز العلاقة وان هذه العلاقة هي علاقة ثنائية وان مجالها هو** ( 12, 10 , 13 , 9 , 14 , 11 , 15).

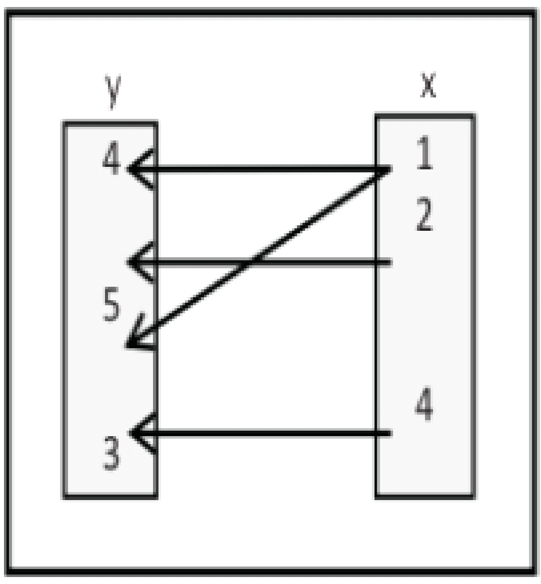



**شكل رقم** (1-5)

## 1-5-2 الدوال Functions

**تسمى العلاقة التي لا يتكرر فيها العنصر الأول في الأزواج المرتبة بالدالة. وهذا يعني أن لكل عنصر في مجال العلاقة يقابله عنصر واحد وفقط واحد في المدى. ونستنتج**

من ذلك أن كل دالة هي علاقة ولكن ليس كل علاقة هي دالة ولهذا فإن العلاقة في المثال أعلاه هي دالة لأن كل عنصر في المجال يقابله عنصر في المدى كما موضح في الشكل (5-1) أدناه:




شكل رقم (6-1)

ولكن العلاقة: Q = (1,4),(2,5),(1,3),(4,7) ليست بدالة لأن مجال الدالة هو (1,2,4) أما مداها فهو (4,3,5,7) وهذا يعني أن هناك عنصر مكرر في مجال الدالة هو العدد (1) يقابله عنصران في المدى هما ( 4,3 ).

ويرمز للدالة برموز خاصة كي يشار إلى عناصر المدى التي تقابل عناصر المجال. ويستخدم الحرف ( $f$ ) عادة للإشارة للدالة وهو يوضح بأن العلاقة (x,y) فيها العدد (y) مرافق للعدد المعطى (x) ويرمز له بالرمز $f(x)$ ويقرأ دالة (x). وعلى هذا الأساس فإن العلاقة المذكورة تكتب بصورة عامة كالآتي:

$$y = f(x) \qquad (1\text{-}7)$$

وإن الأزواج المرتبة في هذه الدالة يمكن كتابتها بالصيغة التالية:

$$\{x, f(x)\} \qquad (1\text{-}8)$$

ويمكن استخدام أية حروف أخرى للإشارة للدالة كالحرف ( g,f,G,y,Ø ) وغير ذلك مثلاً:

وهكذا $y = g(x),\ y = h(x)$

مثال( 1 ):

إذا كانت لدينا العلاقة الآتية:

$$y = 3x + 5$$

فإن العلاقة يمكن كتابتها بالصورة التالية:

$$y = f(x)$$

وهذا يعني أن قيم المتغير( y ) تعتمد على القيم التي تعطى للمتغير( x ) . وأن الرمز( $f$ ) يعني أن ( y ) هو دالة ل ( x )، وعلى هذا الأساس فإن المتغير( y ) يسمى بالمتغير المعتمد أي الذي تتحدد قيمته اعتماداً على قيمة (x )، أما(x ) فيسمى بالمتغير المستقل أي الذي يكتسب قيمه دون الاعتماد على غيره من المتغيرات.

مثال ( 2 ):

إذا كان لدينا الدالة الآتية:

$$f(x) = x^2 + 5x + 7$$

فإن:

$$f(p) = p^2 + 5p + 7$$

$$f(3) = 3^2 + 5(3) + 7 = 31$$

و

$$f(-1) = (-1)^2 + 5(-1) + 7 = 3$$

و

$$f(x+4) = (x+4)^2 + 5(x+4) + 7$$

$$= x^2 + 8x + 16 + 5x + 20 + 7$$

الجزء الأول

$$= x^2 + 13x + 43$$

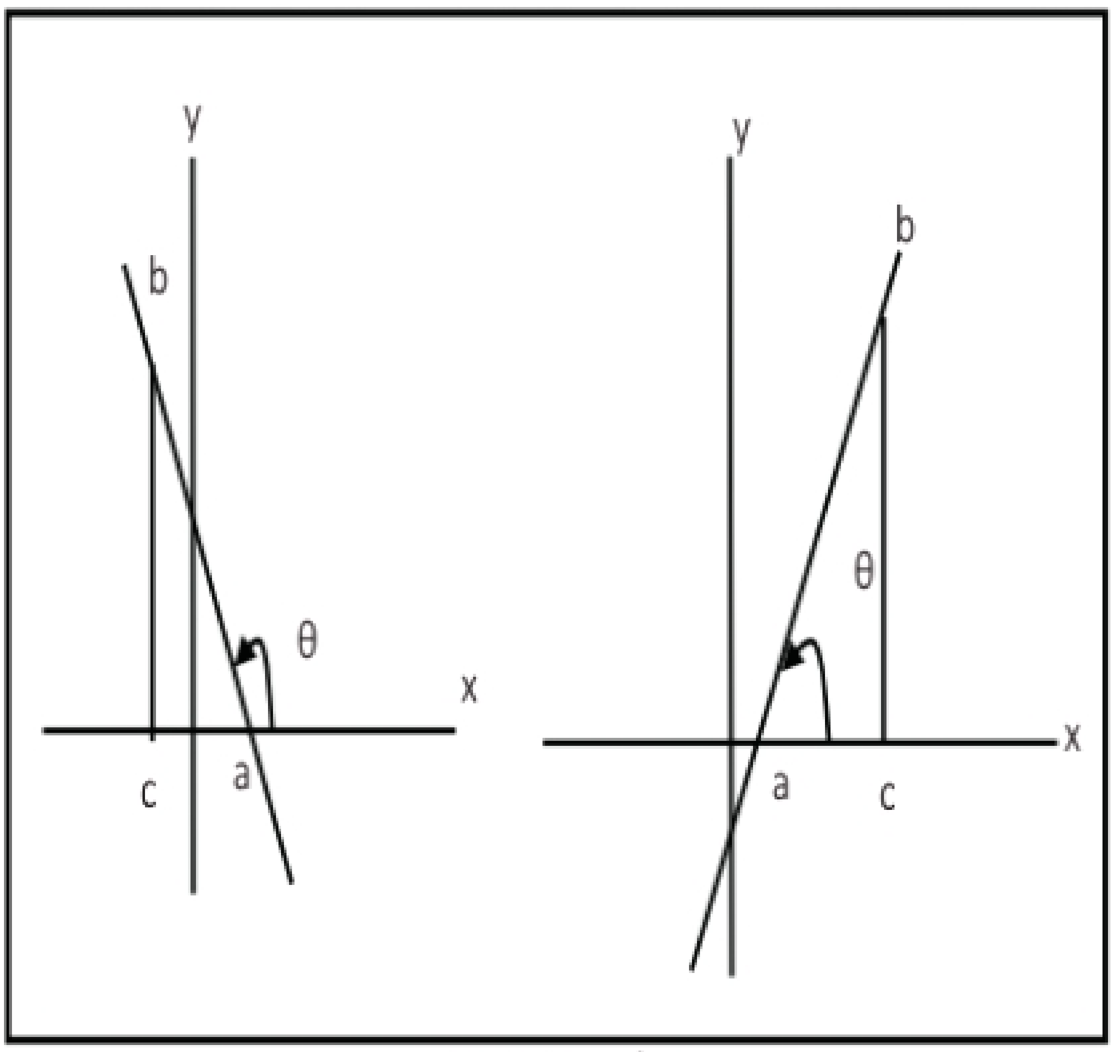
و

$$f(0) = (0)^2 + 5(0) + 7 = 7$$

## 1- 6 الخط المستقيم Straight Line

### 1-6-1 ميل الخط المستقيم Slope of a Straight Line

إذا قطع خط مستقيم محور السينات (الإحداثي x) فإن زاوية ميله تسمى الزاوية $\theta$ والتي تقاس باتجاه معاكس لحركة عقرب الساعة ابتداءً من الاتجاه الموجب للمحور x، ولذلك فإن قيمتها دائماً تقع بين (1800-00) كما مبين في الشكل رقم (1-7):




شكل رقم ( 1-7 )

إن زاوية ميل أي خط مواز للمحور x تساوي صفراً (أي أن $\theta = 0$). وأن ميل أي خط مستقيم يساوي ظل زاوية ميله وعادة ما يرمز له بالحرف (m)، وأن ظل الزاوية هو واحد من ست دوال في علم المثلثات والتي

سنأتي عليها في الفصل الثالث، ونقتصر الحديث الآن على توضيح مفهوم ظل الزاوية:

إن ظل الزاوية $\theta$ في الشكل (1-7) هو $\frac{cb}{ac}$ ويمكن كتابته بالصورة التالية:-

$$\tan\theta = \frac{cb}{ac} \qquad (1\text{-}9)$$

وبصورة عامة: إذا كان $(x_1,y_1)$ و$(x_2,y_2)$ هما أية نقطتين على الخط المستقيم فإن ميل هذا الخط يكون:

$$m = \tan\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad (1\text{-}10)$$

ويستخدم الرمز $\Delta y$ لتمثيل المقدار $y_2-y_1$ والرمز $\Delta x$ لتمثيل المقدار $x_2-x_1$ :

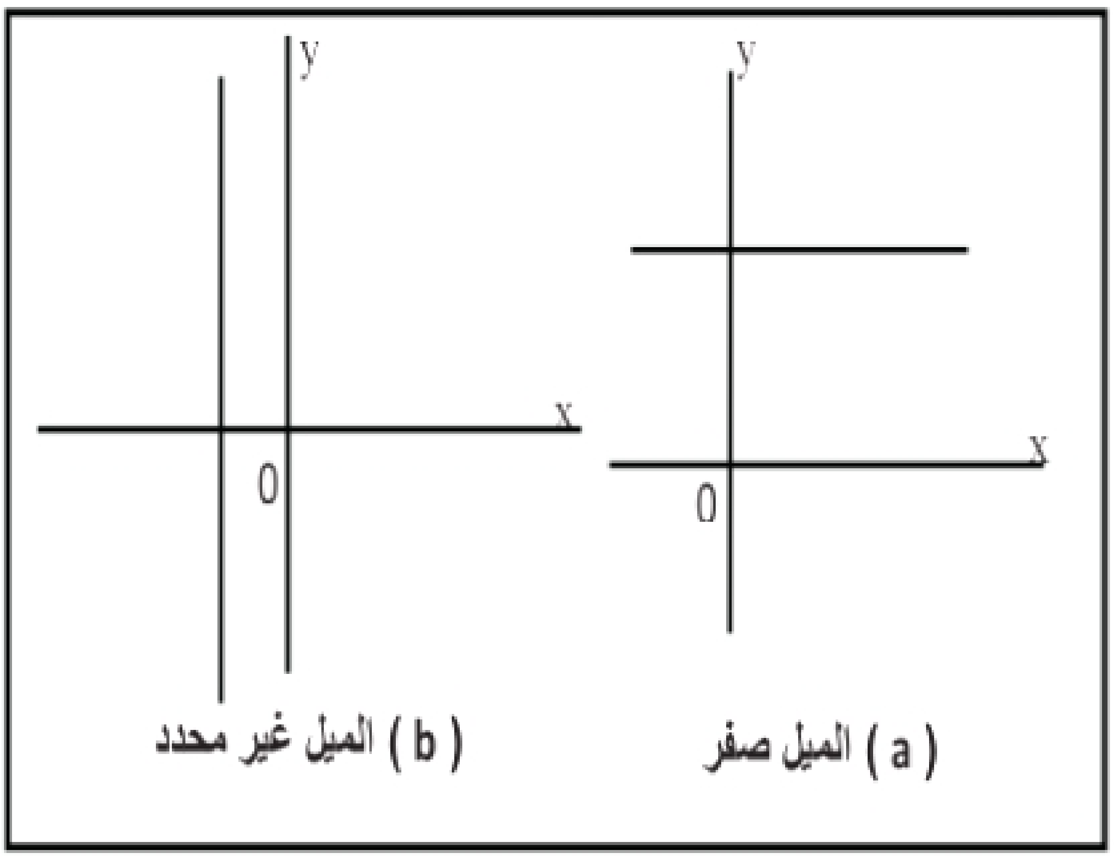
$$\therefore \quad \tan\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad (1\text{-}11)$$

وإذا كانت $y_1=y_2$ و $x_1 \neq x_2$ فإن الخط المار خلال $(x_1,y_1)$ و $(x_2,y_2)$ يكون موازياً للمحور x وان زاوية ميله ($\theta$) تساوي صفراً وإن:

$\tan\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{x} = 0$ كما في الشكل ( 1-8a )

أما إذا كان $x_2=x_1$ ، $y_2 \neq y_1$ فإن الخط المار من خلال $(x_1,y_1)$و$(x_2,y_2)$ يكون موازياً للمحور y وأن زاوية ميله ($\theta$) تساوي ($90^0$) وإن:

$\tan\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y}{0} = \infty$ ، أي غير محددة كما في الشكل (1-8b).




شكل رقم ( 8-1 )

ويلاحـظ بأنـه إذا كـان ميـل الخـط يمينـاً إلى الأعـلى أي أن $\Delta x, \Delta y$ يحمـلان نفـس الإشـارة و $\tan\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$ ففي هذه الحالة تكون $0 < \theta < 90$. وأن ميل المستقيم موجب.

أمـا إذا كـان ميـل الخـط يمينـاً إلى الأسـفل أي أن $\Delta x, \Delta y$ يحمـلان أشـارتين متعاكـستين أي أن $\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x} < 0$ ففي هذه الحالة تكون $90 < \theta < 180$ وأن ميل المستقيم سالب. وعـلى هـذا فـإن أي خطين على مـستوى أمـا أن يكونـا متـوازين أو متقـاطعين، والخطـان اللـذان يـصنعان زاويـة قائمـة عنـد تقاطعهما يكونان متعامدين.

أما الخطـان المتوازيـان فيتميـزان بتـساوي زاويـة انحـدارهما وبـذلك يتـساوى مـيلهما والعكـس بالعكس. أي أن الخطين المتقاطعين لا تتساوى زاويتا انحدارهما وبذلك لا يتساوى ميلاهما. وأن للخطـين المتعامدين ميلان أحدهما سالب مقلوب الآخر (أي حاصل ضرب ميلهما يساوي 1-).

والآن لنأخذ بعض الأمثلة الإيضاحية:

مثال(1):

ما هو شكل ميل المستقيم الآتي:

$$2y - 8x - 4 = 0$$

الجواب: نعيد صياغة المعدلة كالآتي:

$$2y = 8x + 4$$

$$y = \frac{8x}{2} + \frac{4}{2}$$

$$y = 4x + 2$$

ومن المعادلة يظهر أن العلاقة بين $(x , y)$ طر دية أي أنهما يسيران بنفس الاتجاه ولهذا فإن:

$$\tan\ \theta = \frac{+\ \Delta y}{+\ \Delta x}$$

∴ ميل المستقيم y موجب. ومن ذلك نستنتج بأن : $(90 > \theta > 0)$.

مثال ( 2 ) :

بين فيما إذا كان ميل المستقيم الآتي موجباً أم سالباً:

$$3y + 12x + 6 = 0$$

الجواب:

نعيد صياغة المعادلة كالآتي:

$$3y = -12x - 6$$

$$y = -4x - 2$$

ومن المعادلة يتبين أن العلاقة بين $(x , y)$ علاقة عكسية فكلما ازداد x تناقص y والعكس بالعكس ولهذا فإن :

$$\tan\theta = \frac{-\Delta y}{+\Delta x} \quad \text{أو} \quad \tan\theta = \frac{+\Delta y}{-\Delta x}$$

∴ ميل المستقيم y سالب وفي هذه الحالة ( $90 < \theta < 180$ )

مثال( 3 ): جد علاقة الخطوط الآتية بالخط $y - 2x + 5 = 0$

والخطوط هي :

a. $3y - 6x + 9 = 0$

b. $4y - 2x - 4 = 0$

c. $5y - 10x + 35 = 0$

d. $y - 4x + 1 = 0$

الجواب:

نعيد صياغة خط المقارنة $y - 2x + 5 = 0$ كما يلي :

$y = 2x - 5$

والآن نبسط معادلات الخطوط أعلاه ونقارن :

(a) $3y - 6x + 9 = 0$

$y = 2x - 3$

وهذا الخط له نفس ميل خط المقارنة إذن الخطان متوازيان

(b) $4y - 2x - 4 = 0$

نبسط فنحصل على :

$$y = -\frac{1}{2}x + 1$$

إن ميل هذا الخط هو سالب مقلوب ميل خط المقارنة إذن الخطان متعامدان.

(c) $5y - 10x + 25 = 0$

بعد إعادة الصياغة تصبح المعادلة :

$$y = 2x - 5$$

ومن ذلك يظهر أن المعادلة هي نفس معادلة المقارنة إذن الخطان متطابقان.

(d) $y - 4x + 1 = 0$

نعيد الصياغة فينتج :

$$y = 4x - 1$$

ومن مقارنة المعادلتين يظهر أن خطيهما متقاطعان وذلك لاختلاف ميلهما . ويمكن رسم هذه المعادلات للوقوف على حالات التوازي والتعامد والتطابق والتقاطع أعلاه عندما نأتي على طريقة رسم معادلة الخط المستقيم في الفقرة القادمة.

## 1-6-2 معادلة الخط المستقيم Straight line equation

إذا كانت لدينا المعادلة الآتية:

$$ax + by + c = 0 \qquad (1 - 12)$$

حيث أن c، b، a هي ثوابت وان واحداً على الأقل من $a, b \neq 0$ وأن b، a هما معلمتان أما c فهو ثابت عددي، إن معادلة كهذه تسمى معادلة خطية في x, y ولها خط مستقيم يمثلها هندسياً.

ويشار للمعادلة ( 1-12 ) بأنها معادلة عامة ذات متغيرين من الدرجة الأولى. ويقصد بدرجة المتغير: قيمة القوة الصحيحة الموجبة المرفوع إليها المتغير. وإذا كانت المعادلة متكونة من حد جبري أو أكثر فإن درجتها هي أعلى درجة يبلغها هذا الحد فالمعادلة: $X^2+Y^3+8-Y-20 = 0$ هي معادلة من الدرجة الثالثة لان أعلى درجة يبلغها واحد من حدودها هي الدرجة الثالثة وذلك كما في ( $Y^3$ ). والمعادلة $X^2Y+2XY^4=0$ هي معادلة من الدرجة الخامسة لأن أعلى درجة بلغها واحد من حدودها هي خامسة كما في ( $2XY^4$ ) والمتأتية من حاصل جمع قوة المتغير X مع قوة المتغير Y والتي تساوي ( 1+4 = 5 ).

### 1-6-3 تمثيل الخط المستقيم Formulation of Straight Line

يمكن تمثيل الخط المستقيم بإحدى الطريقتين التاليتين :

1- بنقطتين واقعتين عليه.

2- بنقطة واحدة من نقاطه ومقدار ميله. كما أن من الطرق السهلة لرسم الخط المستقيم هو حساب الأجزاء المحصورة ( intercepts ) ويقصد بالأجزاء المحصورة لأي خط هي النقاط التي عندها يقطع هذا الخط المحورين - x, y.

<u>مثال:</u>

ارسم ما يلي هندسياً.

$$y - 2x - 4 = 0$$

لتسهيل العمل نجعل المعادلة بالشكل $y = f(x)$ وبذلك تكون كالآتي:

$$y = 2x + 4$$

بإتباع إحدى الطريقتين لتمثيل الخط المستقيم نأخذ الطريقة الأولى ( أي بتعين نقطتين من نقاط المستقيم ) وذلك بإعطاء أية قيمة مناسبة للمتغير x باعتباره المتغير المستقل للوصول إلى مقابلة لـ y باعتباره المتغير المعتمد فنحصل على الآتي:

| X | 1 | -1 |
|---|---|---|
| Y | 6 | 2 |

شكل رقم ( 1-9 )

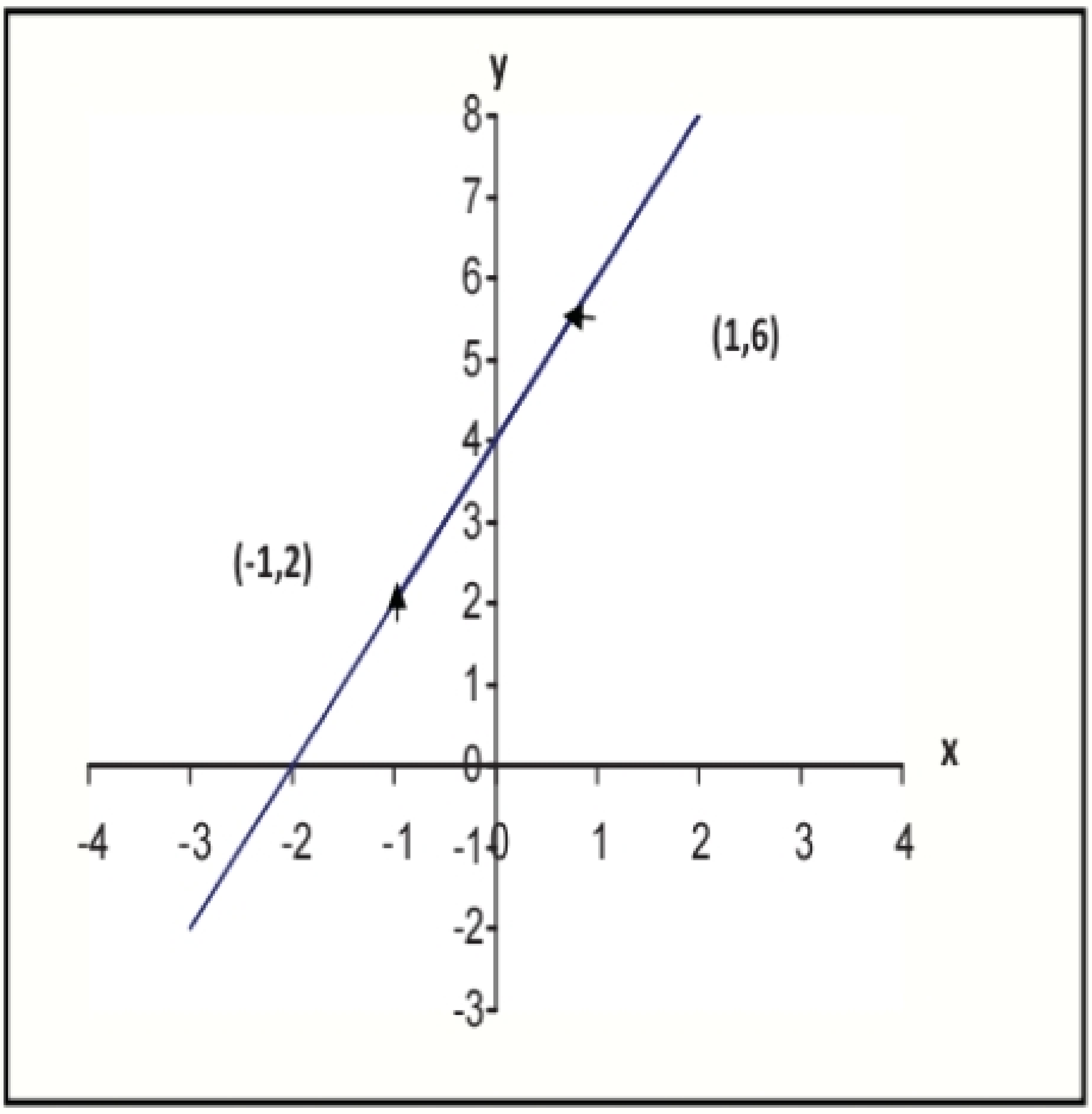
وكما يأتي :

إذا كانت $x = 1$ فإن : $y = 2(1) + 4 = 6$

أما إذا كانت $x = -1$ فإن $y = 2(-1) + 4 = 2$

وبذلك تتحدد لدينا النقطتان وهما: $(1, 6), (-1, 2)$

وبالرسم يكون خط المعادلة كما في الشكل ( 1-10 )




شكل رقم (1-10)

كما يمكن الاستعانة بطريقة تحديد الجزئين المحصورين لكلا المحورين لرسم خط المعادلة ذلك كما يلي:-

خذ المعادلة أعلاه بعد إعادة الصياغة: $2x - y + 4 = 0$

لتحديد محصورة y نجعل $x = 0$ فتؤول المعادلة للاتي:

$$2(0) - y + 4 = 0$$

$$y = 4$$

∴ محصور - $y = (0, 4)$

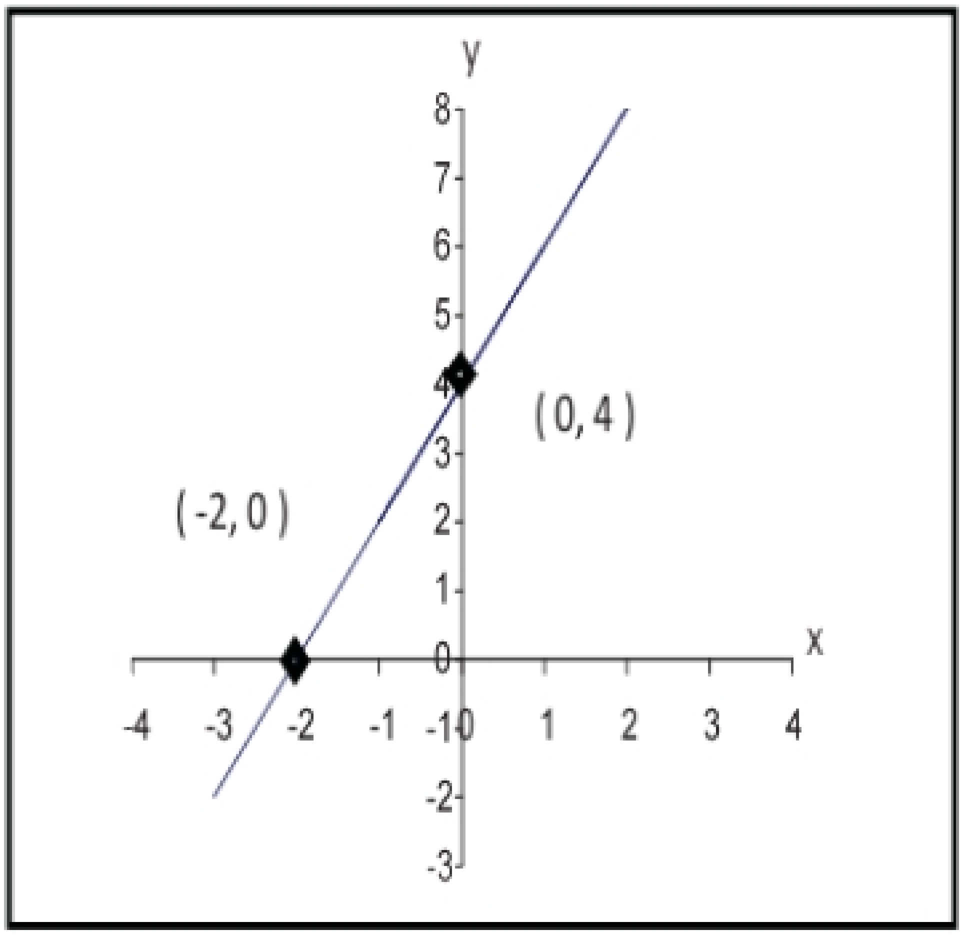
أما محصور - x فنحصل عليه بجعل $y = 0$ ، ويكون لدينا.

$$2x - (0) + 4 = 0$$

$$x = -2$$

∴ محصور - $x = (-2, 0)$

وبتحديد محصور كل من ( X، Y ) يمكن رسم الخط الذي يمر من خلالهما كما موضح في الشكل ( 11 - 1).




شكل رقم ( 1-11 )

### 1-6-4 استخراج معادلة الخط المستقيم

تستخدم الطرق الآتية لاستخراج معادلة الخط المستقيم:

أ- استخدام صيغة النقطتين Two Point Form

كما ذكرنا في العلاقة ( 10 - 1 ) بأن:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

وإذا كانت لدينا أية نقطة أخرى غير النقطتين ( $x_1, y_1$ ) و ( $x_2, y_2$ ) مثل ( x, y ) وهي أية نقطة عامة على الخط المستقيم. فإن انحدار ( ميل ) المستقيم m يساوي:

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \qquad (1\text{-} 13)$$

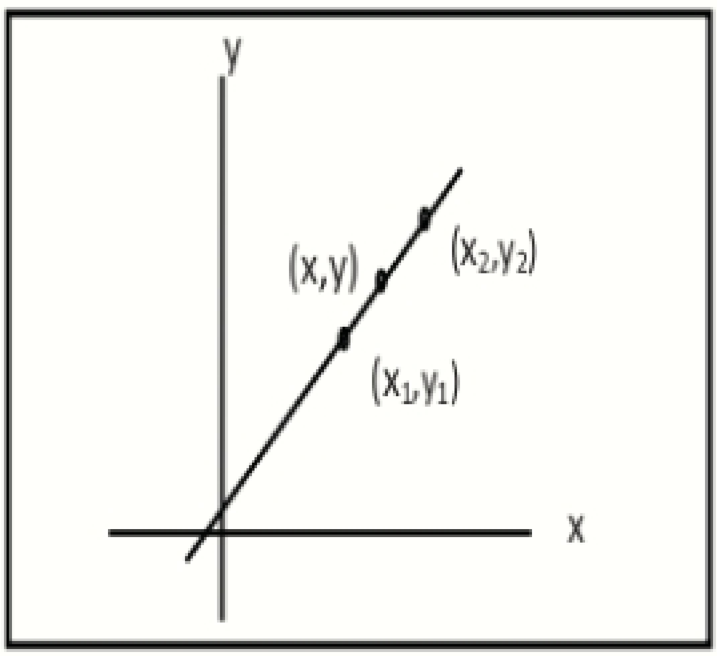
وما دام الميل مقدار ثابت إذن:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

أو

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\left(x-x_1\right) \qquad (1-14)$$

**كما يظهر في الشكل ( 12 - 1 ) ويلاحظ أن اختيار النقاط يتم بشكل اعتباطي وربما نختارها بما يلائم الشكل ويسهل رسمه.**




**شكل رقم ( 1-12 )**

**<u>مثال</u>: أوجد معادلة الخط الذي يمر من النقطتين ( 1, 3 ) و ( 2, 5 )**

**<u>الحل</u>: لدينا:**

$$(x_1, y_1) = (1, 3)$$

$$(x_2, y_2) = (2, 5)$$

**وبالتعويض في العلاقة ( 14 - 1 ) نحصل على:**

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\left(x-x_1\right)$$

**ينتج**

$$y-3=\left(\frac{5-3}{2-1}\right)\left(x-1\right)$$

$$y-3=\frac{2}{1}(x-1)$$

$$y-3=2(x-1)$$

$$y-3=2x-2$$

$$y-2x-1=0$$

وهي معادلة الخط المستقيم.

وللتحقق من الحل نعوض بالنقطة ( 1, 3 ) في المعادلة لنحصل على:

$$y-2x-1=0$$

ينتج:

$$(3)-2(1)-1=0$$

$$0=0$$

أما إذا أخذنا النقطة ( 2, 5 ) ينتج:

$$(5)-2(2)-1=0$$

$$0=0$$

(إذن الحل صحيح)

ب- باستخدام صيغة النقطة - الميل Point -Slope Form

لدينا $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ وذلك من العلاقة ( 10 - 1 )

وإن هذه العلاقة يمكن كتابتها كما في ( 13 - 1 ) أي بالصيغة:

$$m=\frac{y-y_1}{x-x_1}$$

وبإعادة الترتيب نحصل على:

$$y-y_1=m(x-x_1) \qquad (1-15)$$

وبذلك نستطيع الحصول على معادلة الخط المستقيم باستخدام العلاقة الجديدة أعلاه ولنأخذ مثلاً على ذلك:

**مثال:**

جد معادلة الخط الذي يمر بالنقطة ( 1, -2 ) وبانحدار قدره ( 3 ):

**الحل:**

لدينا ( 1,-2 ) = x , y و m = 3 .

وبالتعويض بالعلاقة ( 15 - 1 ) وهي:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

ينتج :

$$y-(-2)=3(x-1)$$
$$y+2=3x-3$$
$$y-3x+5=0$$

ودعنا نختبر صحة الحل:

لتكن $y = f(x)$ في المعادلة $y - 3x + 5 = 0$

$$\therefore y=3x-5$$

نلاحظ في هذه المعادلة أن $m = 3$ .

وإذا عوضنا النقطة ( 1, -2 ) في المعادلة $y-3x+5=0$ ينتج:

$$-2 - 3(1) + 5 = 0$$

$$-5 + 5 = 0$$

$$0 = 0$$

إذن الحل صحيح.

ج- استخدام صيغة الميل - الجزء المحصور Slope-Intercept Form

عندما تكون النقطة ( x, y ) هي ( محصور - y ) في بعض الحالات الخاصة أي أن $(x_1, y_1) = (0, a)$

وهذا يعني انه عندما تكون $x_1=0$ فإن $y_1=a$ وهو الجزء المحصور للمتغير y.

وبهذا يمكن إعادة كتابة العلاقة (15 - 1) كالآتي:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - a = m(x - 0)$$

$$y - a = mx$$

$$\therefore y = mx + a \qquad (1 - 16)$$

مثال:

جد معادلة الخط الذي فيه محصور y -يساوي ( 0, 4 ) وانحداره = 2

الجواب:

$y = 2x + 4$ لدينا a = 4 و m = 2

وبالتعويض في العلاقة ( 1-16 ) ينتج:

$$y = 2x + 4$$

وللتحقق من ذلك نعوض قيم النقطة ( 0, 4 ) في المعادلة $y - 2x - 4 = 0$ وينتج:

4 -2 (0) -4 = 0

0 = 0

إذن الحل صحيح.

د- استخدام صيغة الجزء المحصور Intercept Form

في حالة خاصة عندما تكون النقطة ( $x_1, y_1$ ) تمثل محصور - y ويرمز لها ( 0, a ) والنقطة ( $x_2, y_2$ ) تمثل محصور-x ويرمز لها ( c, 0 ) وان $a \neq 0$ و $c \neq 0$ وفي ضوء ذلك يمكن إعادة كتابة العلاقة (1-14) كالآتي:

العلاقة ( 1 - 14 ) هي:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

ولدينا : $(o,a)=(x_1,y_1)$

و $(c,o)=(x_2,y_2)$

وبتعويض ذلك في العلاقة أعلاه ينتج:

$$y-a=\frac{(0)-a}{c-(0)}(x-0)$$

$$y-a=-\frac{a}{c}x$$

وبالقسمة على a ينتج:

$$\frac{y}{a}-1=-\frac{x}{c}$$

$$\therefore \frac{x}{c}+\frac{y}{a}=1 \qquad (1-17)$$

<u>مثال:</u>

جد معادلة الخط الذي محصوراه (3- ,0) و (5 ,0)

<u>الجواب:</u>

لدينا 3- = a

c = 5

وبالتعويض في العلاقة (17 - 1) ينتج:

$$\frac{x}{5}+\frac{y}{-3}=1$$

وبالضرب في (15) ينتج:

$$3x-5y=15$$

الجزء الأول

إذن المعادلة هي: $3x - 5y - 15 = 0$

وللتحقق من ذلك نعوض النقطة (0, -3) في المعادلة ينتج:

$$3(0) - 5(-3) - 15 = 0$$

$$0 = 0$$

وبالمثل إذا عوضنا قيمة النقطة ( 0, 5 ) ينتج:

$$3(5) - 5(0) - 15 = 0$$

$$0 = 0$$

إذن الحل صحيح.

### 1-6-5 الحل الآني لمعادلتي الخط المستقيم

Simultaneous Solution of Two Straight Line Equations

عندما يتقاطع خطان مستقيمان فإن إحداثيي نقطة تقاطعهما يجب أن يفيا بمتطلبات معادلتي كلا الخطين ويشترط في تقاطع الخطين أن يكونا مستقلين بعضهما عن الآخر ومتناسقين فيما بينهما وبذلك يمكن حل المعادلتين حلاً آنياً وان معنى الاستقلال والتناسق يمكن توضيحه بما يلي:

أ- المعادلات المستقلة Independent Equations

خذ المعادلتين الخطيتين الآنيتين:

$$ax + by + c = 0$$

$$dx + hy + m = 0$$

حيث أن a, b, c, d, h, m هي ثوابت سالبة أو موجبة.

يقال للمعادلتين أعلاه بأنهما مستقلتان إذا لم يكن بالمستطاع استخراج احدهما من الأخرى بواسطة الضرب بثابت غير الصفر. وبمعنى آخر إن حالة الاستقلال تتحقق إذا

كان $\frac{a}{d} \neq \frac{b}{h} \neq \frac{c}{m}$ أما إذا حصل التساوي فإن المعادلتين معتمـدتان إحداهما عـلى الأخـرى. أي أنهـما تمثلان نفس الخط.

مثال (1) :

خذ المعادلتين التاليتين:

$$2x+3y+5=0$$

$$6x+9y+15=0$$

الجواب:

عنـد ضرب المعادلـة الأولى في العـدد ( 3 ) تـصبح مـساوية للمعادلـة الثانيـة. إذن المعـادلتين معتمدتان.

وبطريقـــة أخـــرى يلاحـــظ أن $\frac{a}{d}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}, \quad \frac{b}{h}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}, \quad \frac{c}{m}=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$ إذن $\frac{a}{d}=\frac{b}{h}=\frac{c}{m}$ مما يشير إلى أن المعادلتين معتمدتان.

مثال ( 2 ):

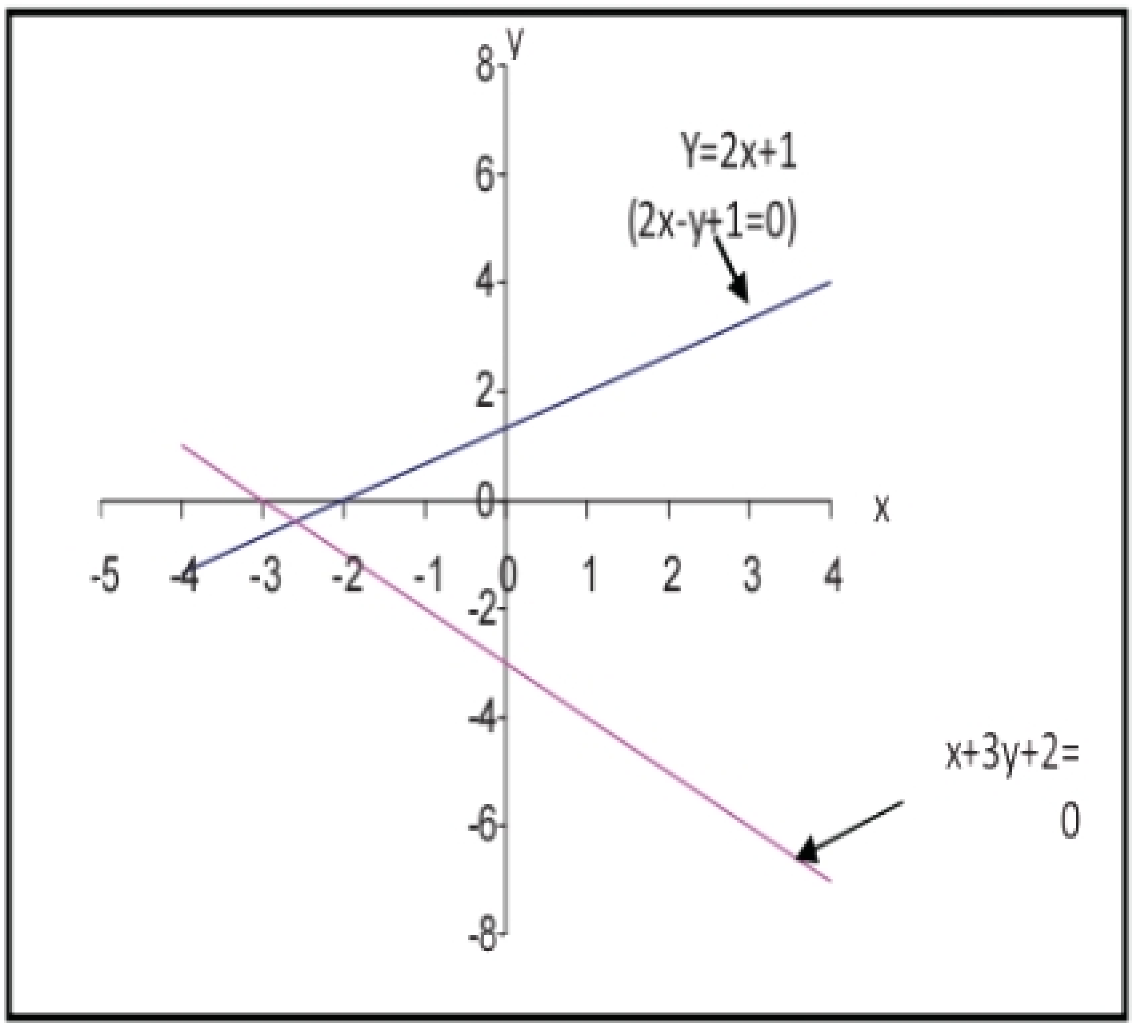
اختبر المعادلتين التاليتين فيما إذا كانت معتمدتين أو مستقلتين:

$$x+3y+2=0$$

$$2x-y+1=0$$

الجواب:

إن ضرب إحـدى المعـادلتين في أي عـدد لا يـؤدي إلى تـساوي المعـادلتين ولهـذا فـإنهما معـادلتين مستقلتان كما أن $\frac{a}{d} \neq \frac{b}{h} \neq \frac{c}{m}$ وهذا دليل آخر يؤكد ذلك. وعند رسم المعـادلتين تظهـر اسـتقلاليتهما واضحة من الشكل رقم ( 13 -1 ).




الشكل رقم ( 1-13 )

ب- المعادلات المتناسقة Consistent Equations

يقال لأية معادلتين بأنهما متناسقتان إذا حصل ما يلي:

$$\frac{a}{d}=\frac{b}{h}=\frac{c}{m}$$

$$\frac{a}{d}\neq\frac{b}{h}$$

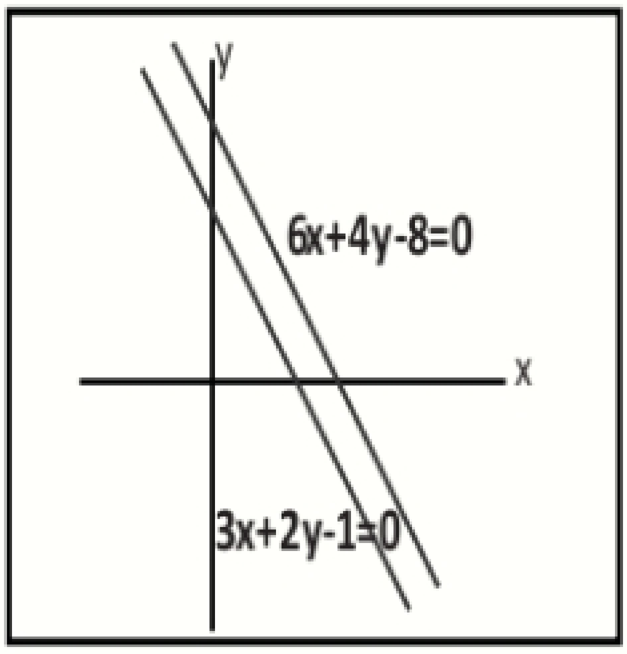
فإذا حصل الشرط الأول يتطابق خطا المعادلتين وتكون المعادلتان متناسقتين ومعتمدتين أي أنهما يمثلان خطاً واحداً وأية نقطة على هذا الخط هي حل أني للمعادلتين. أما إذا حصل الشرط الثاني فيكون للخطين ميلان مختلفان وبذلك يتقاطعان عند نقطة واحدة معينة ويكونان متناسقين ومستقلين وتمثل هذه النقطة حلاً أنياً لهما.أما إذا حصل : $\frac{a}{d}=\frac{b}{h}\neq\frac{c}{m}$ فأن المعادلتين تمثلان خطين متوازيين وإنهما غير متناسقين ولا يمكن حلهما أنياً.

مثال ( 1 ): خذ المعادلتين

$$3x+2y-1=0$$

$$6x-4y-8=0$$

إن هاتين المعادلتين غير متناسقتين ما دام: $\frac{3}{6}=\frac{2}{4}\neq\frac{1}{8}$ ولا يمكن حلهما أنياً وعند رسمهما يكونان خطين متوازيين كما في الشكل ( 14 - 1 ).




الشكل رقم ( 14 - 1 )

مثال ( 2 ):

حل المعادلتين الآنيتين:

$$x+y+3=0$$

$$2x-3y+4=0$$

إن المعادلتين متناسقتان ومستقلتان ويمكن حلهما آنياً مادام $\frac{a}{d}\neq\frac{b}{h}$ ودعنا نرسم المعادلتين بيانياً ونلاحظ ماذا ينتج:

بإعادة كتابة المعادلتين بالصورة التالية:

$$y=-x-3$$

$$y=\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}$$

ونأخذ المعادلة الأولى ونحدد نقطتين على خطهما كما يأتي:

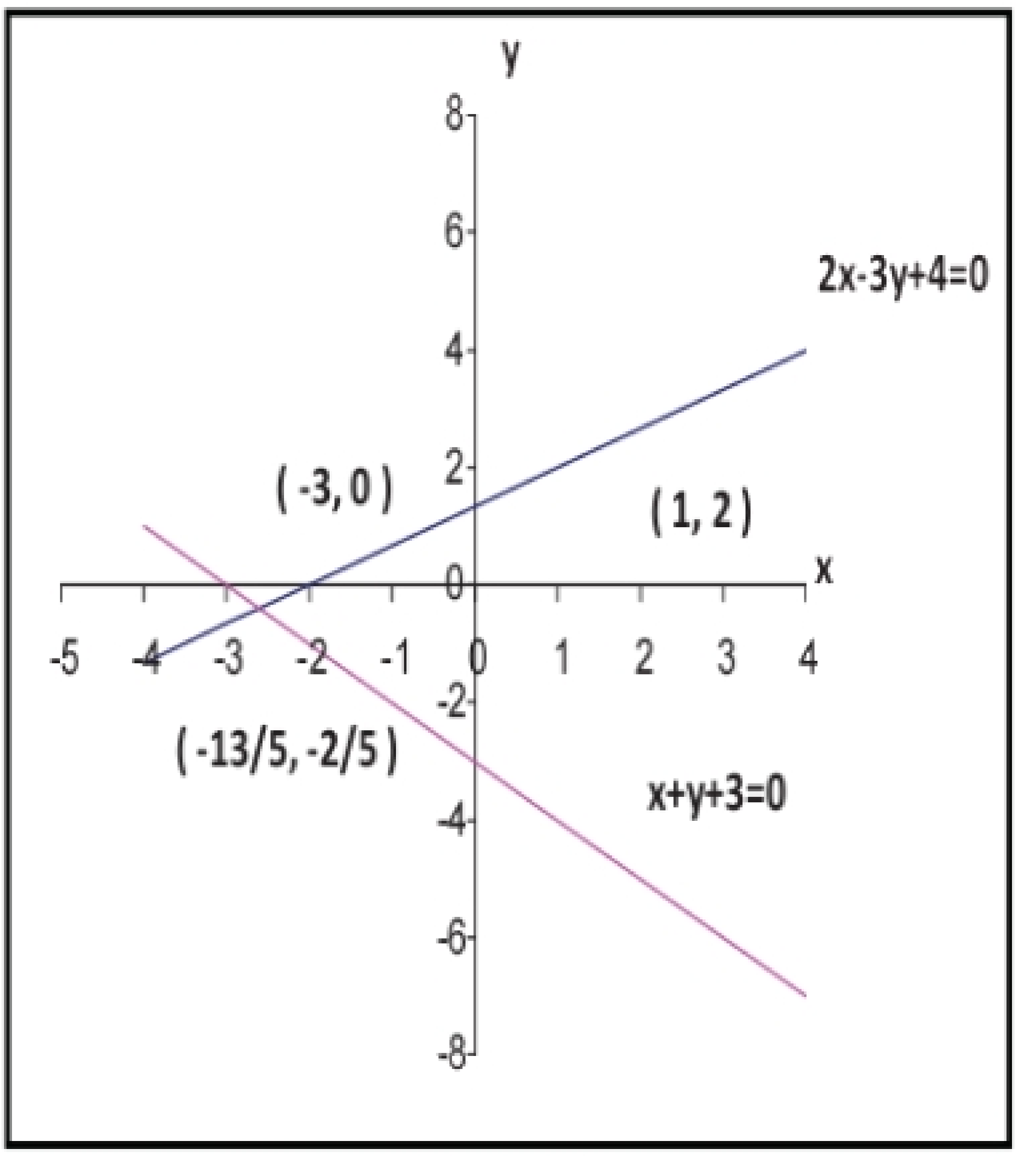
| | | |
|---|---|---|
| X | 1 | -3 |
| y | -4 | 0 |

أما المعادلة الثانية فيمكن تحديد نقطتين من نقاط خطها بالآتي:

| | | |
|---|---|---|
| X | 1 | 5/2 |
| y | 2 | 3 |

وبالرسم يظهر لدينا الشكل (15 -1 ) حيث يتقاطع خطا المعادلتين عند النقطة:

( -13/5, -2/5 )




شكل رقم ( 15 -1 )

ومن نقاط تقاطع المستقيمين نستنتج بأن :

$x = -\frac{13}{5}$ , $y = -\frac{2}{5}$ وهو الحل الآني لهاتين المعادلتين. وإذا ما أجرينا حل المعادلتين بالطريقة الاعتيادية للحل الآني نلاحظ:

خذ المعادلتين مرة ثانية :

$$x + y + 3 = 0$$

$$2x - 3y + 4 = 0$$

وبضرب المعادلة الأولى في ( 2 ) وطرح المعادلة الثانية منها ينتج :

$$5y + 2 = 0$$

$$\therefore y = -\frac{2}{5}$$

وبالتعويض عن قيمة y في إحدى المعادلتين ولنأخذ المعادلة الأولى نحصل على:

$$x + (-\frac{2}{5}) + 3 = 0$$

$$\therefore x = -\frac{13}{5}$$

وهو نفس الحل الذي يستخرج من الرسم البياني.

ومن ذلك نستنتج أن هاتين المعادلتين متناسقتين ولهما حل واحد عند النقطة:

$$(-\frac{13}{5}, -\frac{2}{5})$$

<u>مثال (3):</u>

جد فيما إذا كانت المعادلتان الآتيتان متناسقتين ويمكن حلهما أنياً:

$$x - 3y + 4 = 0$$

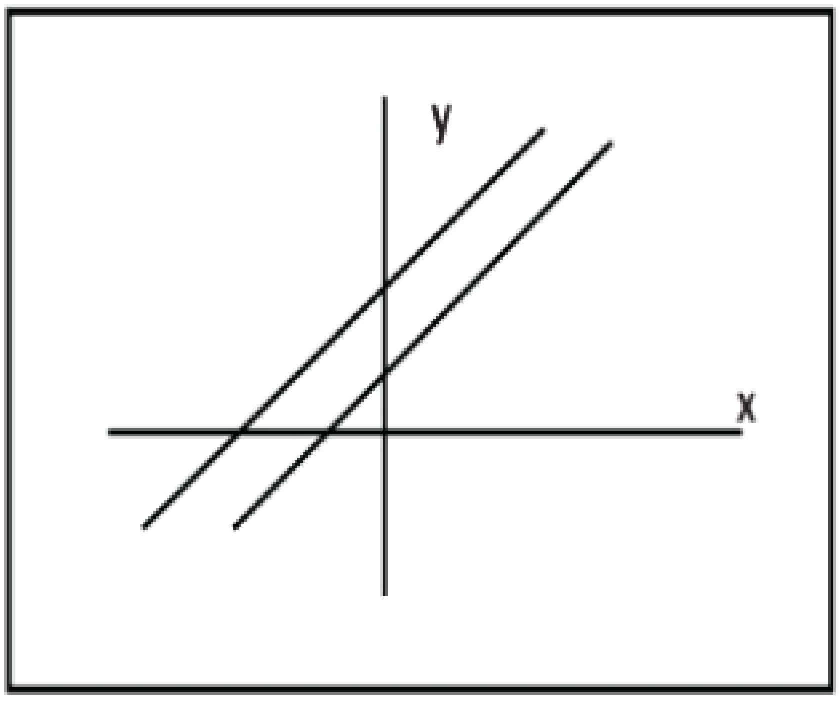
$$2x - 6y + 9 = 0$$

وبضرب المعادلة الأولى بالعدد ( 2 ) وإعادة كتابة المعادلة الثانية مرافقة لها كما يأتي:

$$2x - 6y + 8 = 0$$

$$2x - 6y + 9 = 0$$

نلاحظ أن المعادلتين غير متناسقتين وليس لهما أي حل آني مادام ( $\frac{a}{b} = \frac{b}{h} \neq \frac{c}{m}$ ) ويظهران عند الرسم بخطين متوازيين كما في الشكل ( 16 - 1 ) .




شكل رقم ( 16 - 1 )

مثال (4):

جد نقطة تقاطع الخطين الممثلين بالمعادلتين التاليتين:

$$x - 2y + 3 = 0$$

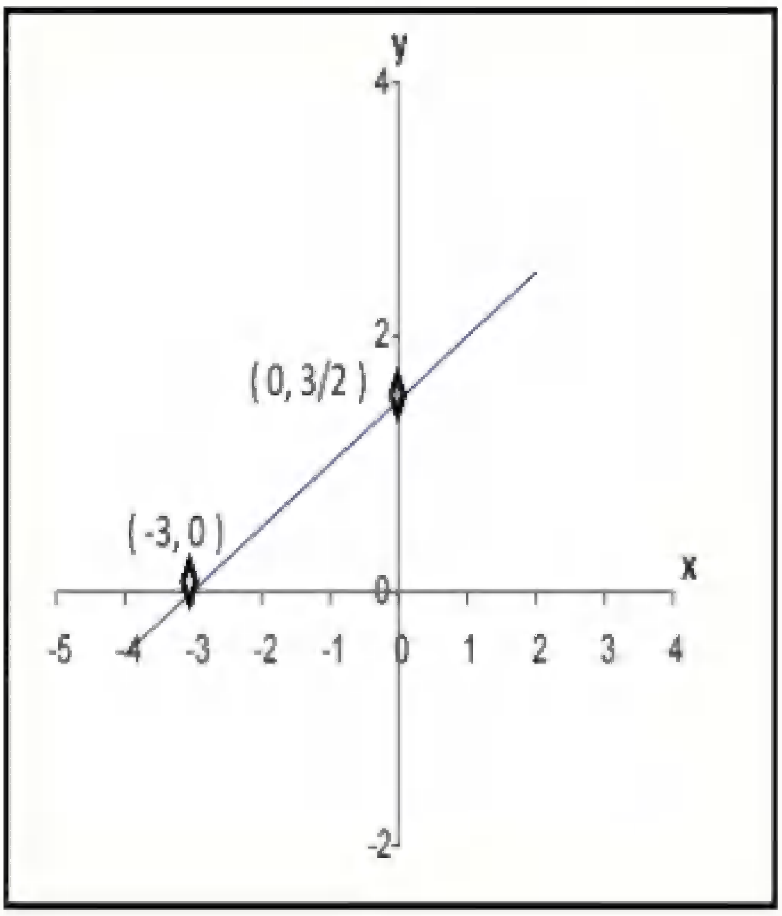
$$3x - 6y + 9 = 0$$

وبضرب المعادلة الأولى في ( 3 ) وإعادة كتابة المعادلة الثانية نحصل على :

$$3x - 6y + 9 = 0$$

$$3x - 6y + 9 = 0$$

إن هاتين المعادلتين معتمدتان (متطابقتان) ولهما ما لا نهاية من الحلول الآنية لكونهما يمثلان مستقيما واحدا وأية نقطة هي حل آني للمعادلتين كما في الشكل (17 - 1).




شكل رقم ( 17 - 1 )

## 1-7 مجموعة الخطوط المستقيمة Families of Lines

تنتمي مجموعة الخطوط المستقيمة إلى معادلة عامة واحدة إذا كانت بعض ثوابتها محددة وواحد من هذه الثوابت على الأقل غير محدد . خذ المعادلة العامة للخط المستقيم كما وردت في الصيغة (12 - 1) وهي:

$$ax + by + c = 0$$

وكما ذكرنا سابقاً إن a, b, c ثوابت ولكن a, b هي معالم تتغير من معادلة إلى أخرى أما c فهو ثابت عددي.

إن الثابتين a, b يحددان جميع الخطوط على المستوى فإذا:

أ- حدد احد هذين الثابتين وترك الآخر بدون تحديد فإن المعادلة تصبح ذات ميل معين وتكون ممثلة لمجموعة من الخطوط التي تمر من نقطة معينة.

ب- حدد الثابتان معاً فعند ذاك تصبح المعادلة ممثلة لخط مستقيم واحد معين يتحول إلى مجموعة من الخطوط المتوازية بمجرد تغيير قيمة الثابت العددي.

ولغرض توضيح هذه المجموعة من الخطوط وفق الشرطين ( أ، ب ) أعلاه نأخذ الأمثلة الآتية:

مثال ( 1 ): خذ المعادلة الآتية:

$$2x + by - 5 = 0$$

وقد حددت المعلمة a بالقيمة ( 2 )والثابت العددي بالقيمة ( 5 ) بينما تركت المعلمة b بدون تحديد.

والمطلوب رسم هذه المعادلة بإعطاء قيم مختلفة مناسبة للمعلمة ( b ).

الجواب:

نفترض أن ( b ) أعطيت القيم الآتية: ( 3, 1, -2 )

إذن تصبح لدينا ثلاث معادلات هي:

$$2x + 3y - 5 = 0$$

$$2x + y - 5 = 0$$

والآن نرسم الخط المستقيم الممثل لكل معادلة منها وذلك بإتباع طريقة تحديد نقطتين وكما يلي:

بإعادة صياغة المعادلات:

$$y = \frac{-2x + 5}{3} = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3} \qquad (1)$$

$$y = -2x + 5 \qquad (2)$$

$$y=\frac{2x-5}{2}=x-\frac{5}{2} \qquad (3)$$

| المتغير / المعادلة | الأولى | | الثانية | | الثالثة | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| x | 3 | 0 | 2 | 0 | $\frac{5}{2}$ | 0 |
| y | $-\frac{1}{3}$ | $\frac{5}{3}$ | 1 | 5 | 0 | $-\frac{5}{2}$ |

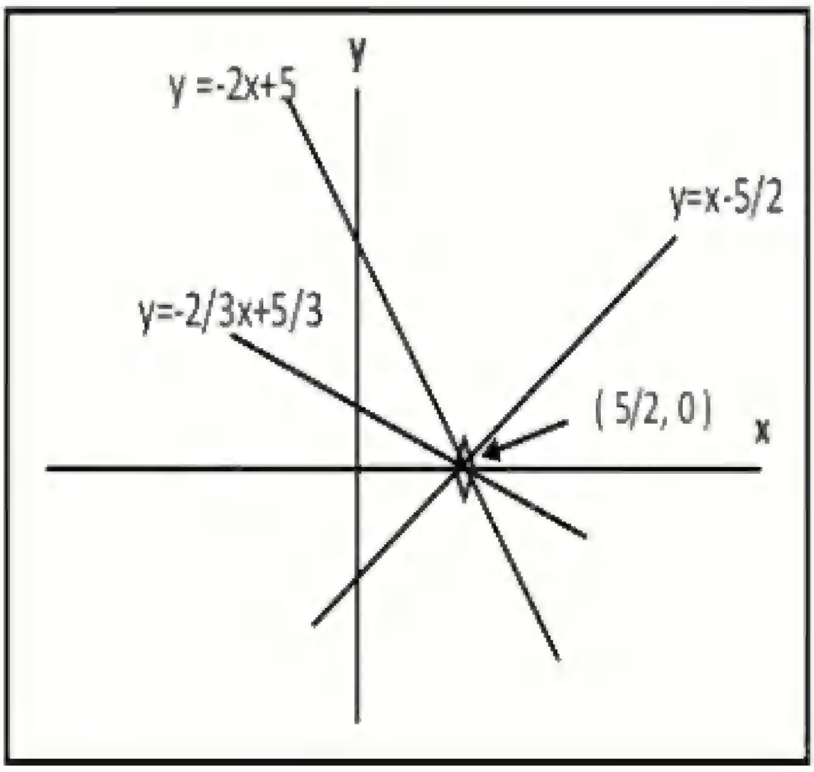
**وبذلك نحصل على النقاط الآتية :**

**المعادلة الأولى :** $(3\ ,-\ \frac{1}{3})$ , $(0\ ,\ \frac{5}{3})$

**المعادلة الثانية :** $(2, 1)$ , $(0, 5)$

**المعادلة الثالثة :** $(\frac{5}{2}, 0)$ , $(0\ ,-\ \frac{5}{2})$

**عند رسم هذه المعادلات وفق النقاط أعلاه نحصل على الرسم البياني الموضح في الشكل رقم** ( 1-18 )




**الشكل رقم** ( 1-18 )

ويمكن رسم ما لا نهاية من الخطوط التي تمر جميعها بالنقطة ( $0 , \frac{5}{2}$ ) مشكلة مجموعة الخطوط المستقيمة التي تنتمي للمعادلة : $2x + by - 5 = 0$

<u>مثال (2):</u>

خذ معادلة الخط المستقيم بصيغتها العامة :

$$ax + by + c = 0$$

نفترض أن كلا من a , b محددان بالقيمة (3-, 1) وان الثابت العددي يساوي (2)، والمطلوب رسم هذه المعادلة.

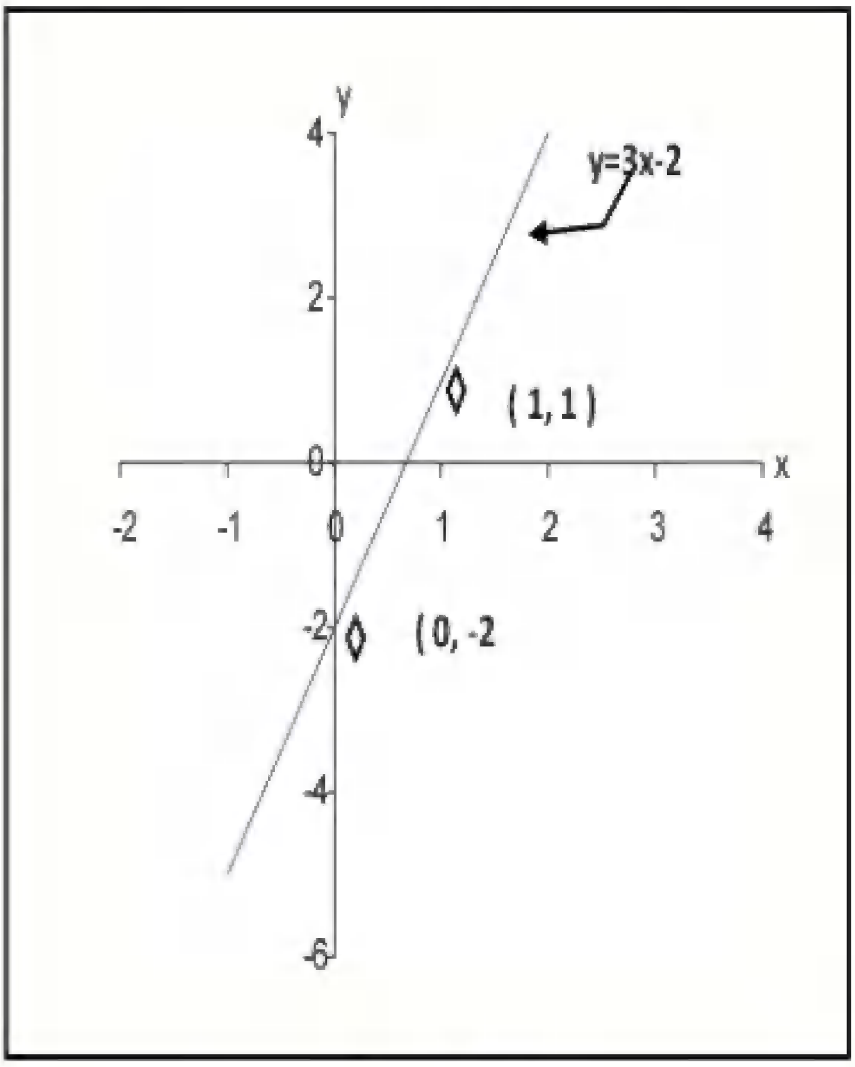
<u>الجواب:</u>

المعادلة بصيغتها المحددة تظهر كالآتي:

$$-3x + y + 2 = 0$$

أو $y = 3x - 2$

حيث أن كلا من a , b محددتا القيمة لذلك فإن المعادلة $y = 3x - 2$ ممثلة لخط مستقيم واحد معين وليس لمجموعة من الخطوط كما يظهر في الشكل ( 19 - 1 ).




الشكل رقم ( 19-1)

<u>مثال (3):</u>

خذ معادلة الخط المستقيم التالية :

$$\frac{1}{2}x - \frac{2}{3}y + c = 0$$

والمطلوب رسم هذه المعادلة بإعطاء قيم مختلفة للثابت العددي c

<u>الجواب :</u>

يلاحظ أن المعلمة a و المعلمة b قد حددت وبذلك تحدد ميل المعادلة وأصبحت ممثلة لخط مستقيم واحد . وحيث أن ( c ) ترك ليأخذ قيما مختلفة رغم انه ثابت عددي لذا نستطيع أن نحصل على مجموعة من الخطوط المتوازية التي تنتمي إلى معادلة واحدة.

دعنا نرى ذلك :

نعيد صياغة المعادلة كالآتي:

$$\frac{2}{3}y = \frac{1}{2}x + c$$

$$y = \frac{3}{4}x + \frac{3}{2}c$$

حيث أن c هو أي ثابت عددي إذن نستطيع أن نضع بدلاً من $\frac{3}{2}c$ الثابت c فقط. ولهذا

تصبح المعادلة :

$$y = \frac{3}{4}x + c$$

ولكي نرسم المعادلة نستخدم طريقة تحديد نقطتين لنحصل على:

| x | 0 | 4 |
|---|---|---|
| y | c | 3+c |

إذن النقطتان هما ( 0 , c ) , ( 4,3 + c )

ولنفرض أن ( c ) أعطيت القيم الآتية ( 1 , 1- , 2 , 3- ) وعند التعويض بقيمة c في النقطتين أعلاه

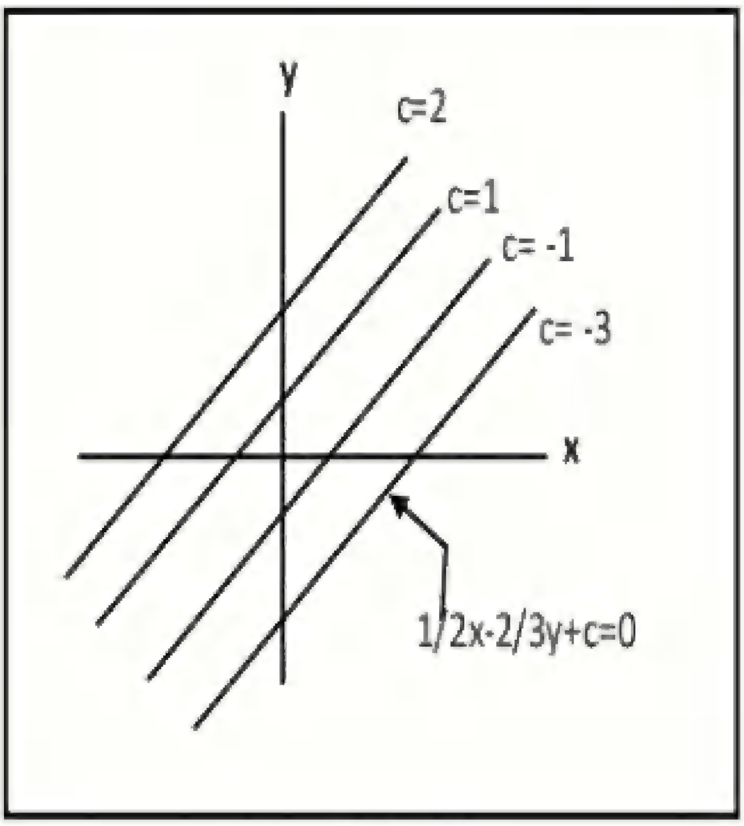
نحصل على النقاط الممثلة للمستقيمات الآتية :

[ ( 0 , -3 ) , ( 4 , 0 ) ], [ ( 0 , 2 ) , ( 4 , 5 ) ] , [ ( 0 , -1 ) , ( 4 , 2 ) ] ,

[ ( 0 , 1 ) , ( 4 , 4 ) ]

وعند رسم هذه النقاط حيث كل نقطتين تستخدم لرسم خط واحد تحصل على الرسم البياني في

الشكل رقم ( 20 - 1 ):




الشكل رقم ( 20 - 1 )

ويمكن رسم مالا نهاية من الخطوط بافتراض أية قيمة للثابت العددي c وبذلك تتكون لدينا ما لا نهاية من الخطوط التي تنتمي إلى معادلة واحدة وهي مجموعة ذات خصائص معينة.

تمارين ( 2-1 )

أ- جد معادلة الخط الذي يمر من خلال أزواج النقاط الآتية :

1- ( 3, 4 ), ( 1, 2 )

2- ( 5, -2 ), ( 4, 3 )

3- ( -7, 4 ), ( 1, 3 )

4- ( 0, 2 ), ( 6, -1 )

5- ( 5, 3 ), ( 0, 0 )

6- ( 1, 1 ), ( 3, -5 )

7- ( 0, 4 ), ( -1, 0 )

ب- جد معادلة الخط الذي يمر من خلال النقطة والميل المبينان بالاتي :

1- ( 1, 3 ) وميل ( 2 )

2- ( 2, 1 ) وميل ( 0 )

3- ( 5, 3 ) وميل ( لا محدود )

4- ( 0, 0 ) وميل ( 1/2 )

5- ( 0, 0 ) وميل ( 0 )

6- ( -1, 4 ) وميل (-1 )

7- ( 0, 2 ) وميل ( 3 )

8- ( 0, -3 ) وميل ( 1/3 )

ج- أية علاقة يشكل الخط $2x + 3y - 6 = 0$ مع الخطوط الآتية هل هي علاقة تعامد أم توازي أم تطابق أم تقاطع:

1- $4y - 6x - 8 = 0$

2- $4x + 6y - 3 = 0$

3- $(2/3)x - y - 2 = 0$

4- $2x - y + 3 = 0$

# الفصل الثاني

# بعض العلاقات الاقتصادية الخطية

# Some Linear Economic Relations

# بعض العلاقات الاقتصادية الخطية

# Some Linear Economic Relations

## 2-1 مقدمة

تبيّن الدالة الخطية العلاقة النسبية بين متغيرين (أو أكثر) والتي يمكن تمثيلها بخط مستقيم (منحنى) يظهر بشكل رسم بياني. وقد تم التطرق في الفصل الأول إلى السبل المتبعة في رسم معادلة الخط المستقيم أو كيفية استخراجها من خلال علاقات خطية معطاة.

وفي النظرية الاقتصادية هناك وصف لكثير من العلاقات الاقتصادية التي تؤثر ظاهرة بفعلها السببي بظاهرة أخرى مكونة لدينا علاقات دالية خطية بصيغة معادلة خط مستقيم. فالاستهلاك مثلاً يمكن أن ينسب إلى مستوى الدخل الوطني بعلاقة طردية تقول بأنه كلما ارتفع مستوى الدخل الوطني ازداد مستوى الاستهلاك والعكس بالعكس. والطلب على سلعة معينة يمكن أن ينسب بعلاقة عكسية لمستوى سعر تلك السلعة فكلما انخفض السعر مال الطلب للارتفاع والعكس صحيح.

فالعلاقة التالية هي علاقة خطية :

$$y = ax + b \qquad (2\text{-}1)$$

حيث أن ( y ) هو المتغير المعتمد و( x ) المتغير المستقل أما ( a ,b ) فهي ثوابت ولكن (a) هو ثابت معلمي و( b ) ثابت عددي وقد يكون في بعض الأحيان معلمياً أيضا. ونتذكر أن المعالم هي ثوابت ولكنها تتغير من وقت لآخر ومن ظاهرة لأخرى ومن بلد لآخر ومن ظرف لآخر ولغرض تحليل العلاقة أعلاه ورسمها بيانياً لا بد من معرفة قيم كل من (a, b) وهذا يتم وفق طرق فنية الذي يعنينا منها هو استعراض بعض الدوال

الخطية الاقتصادية الشائعة الاستعمال وذات الأهمية في فهم العلاقات الاقتصادية المختلفة. ولابد من التنويه هنا إلى أن الخط المستقيم يشار إليه في بعض الأحيان بالمنحنى عند الكلام عن الدوال الاقتصادية بشكلها العام.

## 2-2 دالة الاستهلاك **Consumption Function**

تعتمد النفقات الاستهلاكية على العديد من العوامل المؤثرة التي يختلف كل منها في طبيعة ودرجة تأثيره عن الآخر وأكثر العوامل تأثيراً هو مستوى الدخل سواء كان على الصعيد الفردي أو المستوى الوطني.

إن تحليلات الاقتصاد الوطني تبلور لنا هذه العلاقة على شكل دالة خطية في المدى القصير مستندة إلى جملة من الافتراضات:-

1- هناك كمية ثابتة من الاستهلاك لابد منها للإبقاء على ديمومة الحياة حتى في حالة انعدام الدخل.

2- إن الاستهلاك ينسب إلى الدخل المتاح (**disposable income**) أي أن:

$$c = f(y^d) \qquad (2\text{-}2)$$

حيث أن $c$ : تمثل مستوى الاستهلاك .

$y^d$ : تمثل الدخل المتاح ويقصد به الدخل بعد طرح الضرائب والرسوم .

3- إذا ازداد الدخل المتاح فإن الاستهلاك سيزداد ولكن بنسبة اقل من نسبة زيادة الدخل المتاح، وبشكل رياضي إذا كانت $\Delta yd$ : تمثل الزيادة في الدخل المتاح . و $c$ : تمثل الزيادة في الاستهلاك فأن $\frac{\Delta c}{\Delta yd}$ هي كمية موجبة ولكن اصغر من واحد أي أن: $o < \frac{\Delta c}{\Delta y^d} < 1$

4- إن نسبة الزيادة في الدخل المستهلك ثابتة في الأمد القصير، ويشار إلى هذه النسبة بالميل الحدي للاستهلاك .

إن الافتراضات الآنفة الذكر يمكن أن توضع بصيغة معادلة خط مستقيم (النقطة - الميل) كالآتي:-

$$c = a + by^{d}$$

حيث أن:

$c$ : تمثل مستوى الاستهلاك .

$a$ : الاستهلاك الأساس : مقدار ثابت يستهلكه الفرد أو المجتمع لإدامة الحياة بغض النظر عن مستوى الدخل الفردي أو الوطني .

$b$ : مقدار ثابت ويمثل الميل الحدي الاستهلاك ( mpc ) .

$y^{d}$ : الدخل المتاح.

مثال:

قام احد الباحثين بتحليل طبيعة الاستهلاك في بلد معين لفترة زمنية معينة فتبين له الآتي:-

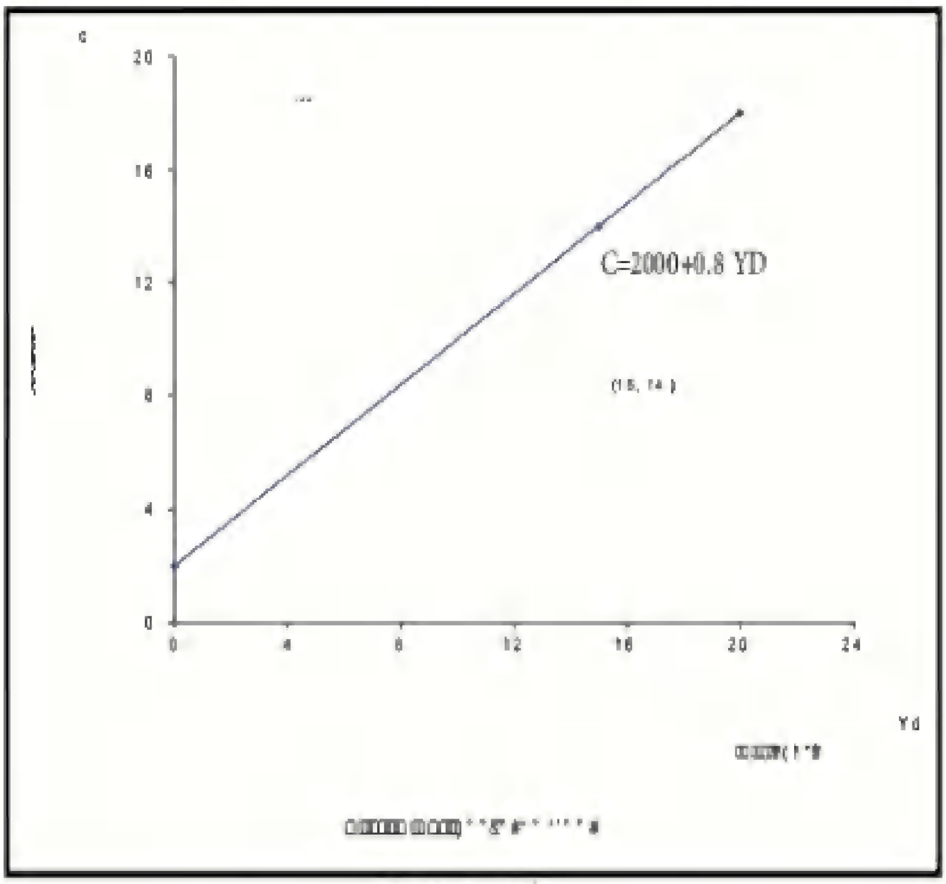
1- عندما كان مستوى الدخل المتاح يساوي صفرا كان مستوى الاستهلاك (2000) مليون وحدة نقدية .

2- عند أي مستوى من مستويات الدخل المتاح يتحدد الاستهلاك بالمقدار (2000) مليون وحدة مضافا إلى ذلك (80%) من الدخل المتاح ووفق الدالة الآتية:

$$y^{d} = 2000 + 0.80\ c$$

3- وعليه وعندما يكون الدخل الوطني المتاح (15000) مليون وحدة فإن الاستهلاك: $C$ 0.8 + 2000 = 15000

مليون وحدة نقدية 14000 = 12000 + 2000 = كما في الشكل (1-2)




شكل رقم (2-1)

## 2-3 دالة الطلب Demand Function

هي شكل العلاقة بين الكميات المطلوبة وبين العوامل المحددة لها كسعر السلعة المشتراة وأسعار السلع الأخرى ومستوى دخل المستهلك وغيرها. وعموماً فإن الطلب على السلعة يكون :-

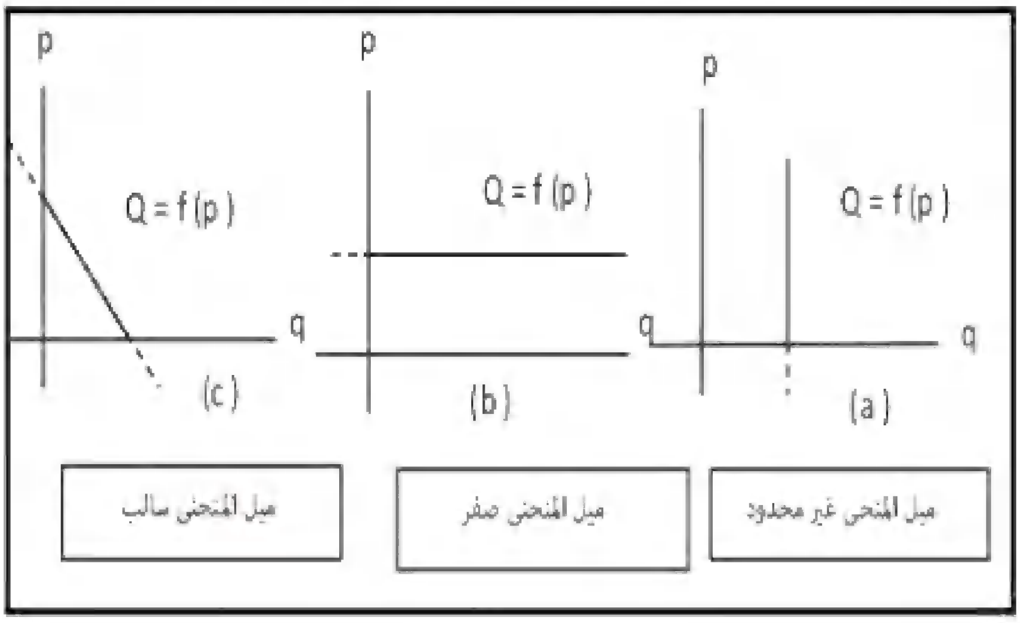
$$q = f(p) \qquad (2\text{-}3)$$

حيث أن $q$ : يمثل الطلب على السلعة .

و $p$ : يمثل سعر السلعة .

إن ميل منحنى الطلب في الحالات الاعتيادية سالب أي أن العلاقة بين الكميات المطلوبة والسعر علاقة عكسية، فإذا ارتفع السعر انخفضت الكميات المطلوبة وبالعكس أذا انخفض السعر زادت الكميات المطلوبة من تلك السلعة.وهناك حالات يكون فيها

ميل الطلب[1] يساوي صفراً أي أن السعر يبقى ثابتاً بغض النظر عن الكميات المطلوبة وفي حالات أخرى عندما يكون مستوى الطلب ثابت بغض النظر عن تغير الأسعار فإن ميل المنحنى هنا يكون غير محدد. والشكل (2 -2) يوضح لنا هذه الحالات الثلاث لمنحنى الطلب[2]




شكل رقم (2-2)

<u>مثال (1):</u>

وجد في سوق الفواكه انه عندما كان سعر الكغم الواحد من التفاح (2000) وحدة نقدية كانت الكميات المباعة (500) كغم وإذا انخفض السعر إلى (1500) وحدة نقدية فإن المبيعات سترتفع إلى (1000) كغم. جد معادلة الطلب على هذه السلعة؟

<u>الجواب:</u>

تستخدم صيغة النقطتين المذكورة في العلاقة (1-14) لإيجاد معادلة الطلب وكما يأتي:

(1) نقصد بالمنحنى هنا الخط المستقيم مادام الحديث منصب على معادلة الخط المستقيم.

(2) جرت العادة في التمثيل البياني لمنحنيات الطلب على أن يكون السعر (p) في المحور-y بينما الكميات المطلوبة (q) في المحور-x.

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2}\left(x - x_1\right)$$

ولتسهيل الحل نحول الرموز في معادلة الطلب إلى الصيغة العامة أعلاه أي ليكن:

$x = p\ ,\ y = q$

وبذلك يكون لدينا:

$(q1,p1) = (500,2000)$

$(q2,\ p2) = (1000,1500)$

أذن:

$$q - 2000 = \frac{1500 - 2000}{1000 - 500}(p - 500)$$

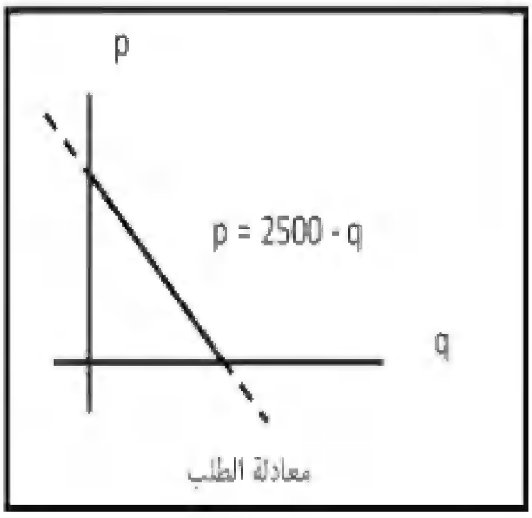
$$q - 2000 = \frac{-500}{500}(p - 500)$$

$$q - 2000 = -p + 500$$

$$p = 2500 - q \text{ أو } q = 2500 - p$$

وبالرسم تظهر العلاقة بالصورة الآتية المبينة في الشكل رقم (3-2): وذلك باستخدام طريقة الرسم بنقطتين:

| | | |
|---|---|---|
| p | 1500 | 500 |
| q | 1000 | 2000 |




شكل رقم (2-3)

مثال(2):

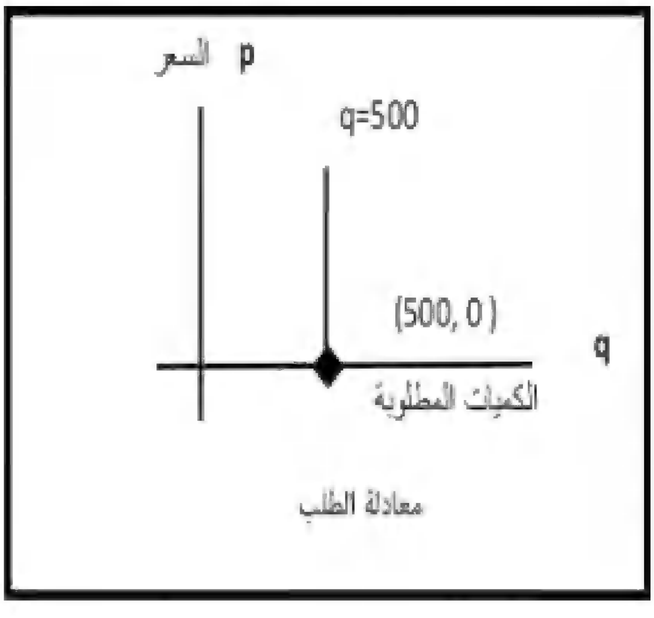
من المعروف أن حجم الطلب على مادة الملح محدود (ثابت) بغض النظر عن مستوى أسعاره ولهذا وجد بأن حجم الطلب السنوي على هذه المادة يبلغ (500) طن سنوياً، فما هي معادلة الطلب لهذه المادة ؟

الجواب :

يلاحظ أن الطلب (q) = كمية ثابتة = 500

أي أن $q = 500$

أما السعر : $p = \infty$ (أي أن منحنى الطلب غير محدود) كما في الشكل (2-4):




شكل رقم (2-4)

## 2-4 دالة العرض **Supply Function**

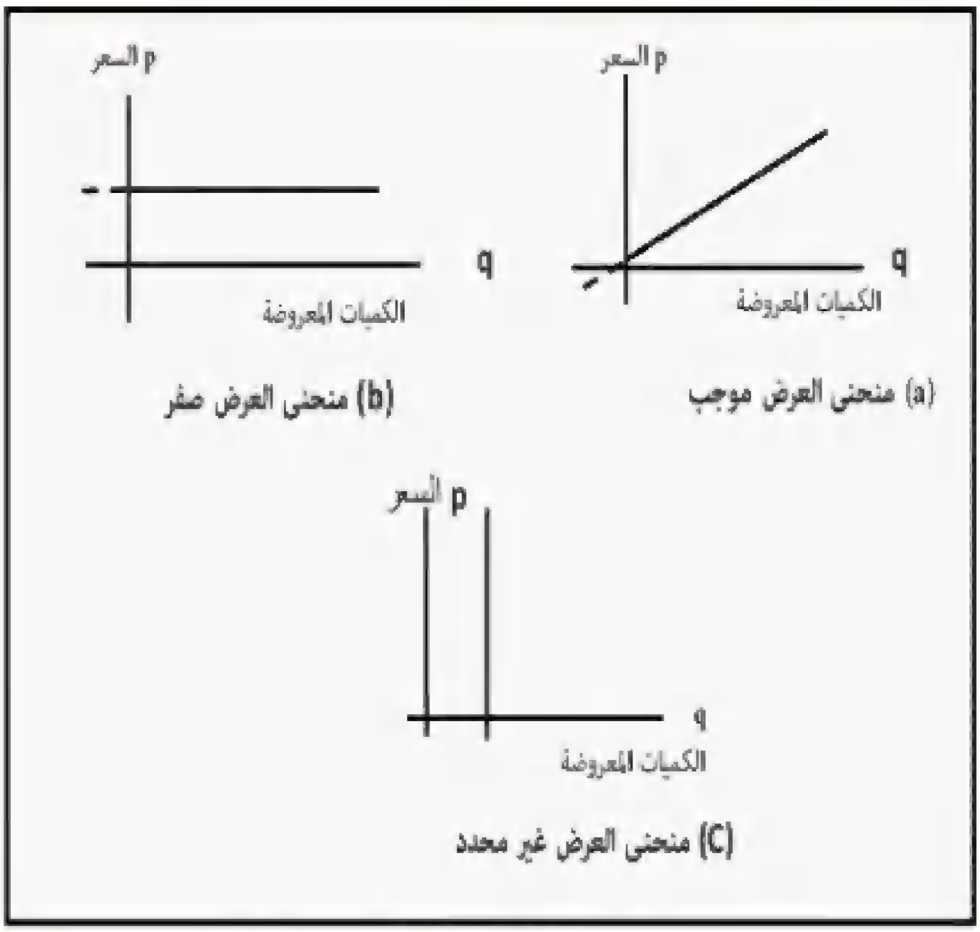
هي شكل العلاقة بين الكميات المعروضة وبين العوامل المحددة لها كسعر السلعة وأسعار السلع الأخرى ومستوى دخل المستهلك وغيرها، وتكتب الدالة المذكورة بصورتها المبسطة كالآتي:

$$q = f(p) \qquad (2\text{-}4)$$

حيث أن :

q: الكميات المعروضة . p: سعر السلعة .

وفي الحالات الاعتيادية يأخذ منحنى العرض ميلاً موجباً أي عندما يرتفع سعر سلعة معينة تزداد الكميات المعروضة من السلعة المذكورة وعندما ينخفض السعر تنخفض الكميات المعروضة منها. وفي حالات معينة قد يكون منحنى العرض صفراً أي ثبات السعر مهما كان مستوى العرض، وفي حالات أخرى قد يكون منحنى العرض غير محدد أي ثبات العرض مهما كان مستوى السعر. وتظهر الحالات أعلاه كما في الشكل (2-5).




شكل رقم (2-5)

وكما بينا في دالة الطلب فإن القيم التي يعتد بها في النظرية الاقتصادية هي القيم الموجبة ولا تدخل في الاعتبار القيم السالبة لان الكميات المعروضة أو المطلوبة أو الأسعار يتعين أن تكون موجبة أو صفراً ولهذا فإن التحليلات الاقتصادية تقع عادة في الربع الأول من الإحداثيات ولهذا فإن الذي يهمنا القيم الموجبة لكل من (q , p) فقط، ودعنا نأخذ بعض الأمثلة:

مثال(1):

عندما كان سعر القطن (5) آلاف وحدة نقدية للطن الواحد فإن (20) ألف طن بيعت في الأسواق ولكن عندما ارتفع السعر إلى (8) آلاف وحدة نقدية كانت الكميات المجهزة (35) ألف طن. فما هي معادلة العرض التي تمثل هذه العلاقة؟

الجواب:

نأخذ أيضاً صيغة النقطتين لاستخراج الدالة الخطية للعرض:

$$p - p_1 = \frac{p_2 - p_1}{q_2 - q_1}(q - q_1)$$

ولما كان لدينا:

$p_1 = 5 , q_1 = 20$

$p2 = 8 , q_2 = 35$

فإن :

$$p - 5 = \frac{8 - 5}{35 - 20}(q - 20)$$

$$p - 5 = \frac{1}{5}(q - 20)$$

ينتج :

$5p - 25 = q - 20$

إذن دالة العرض هي:

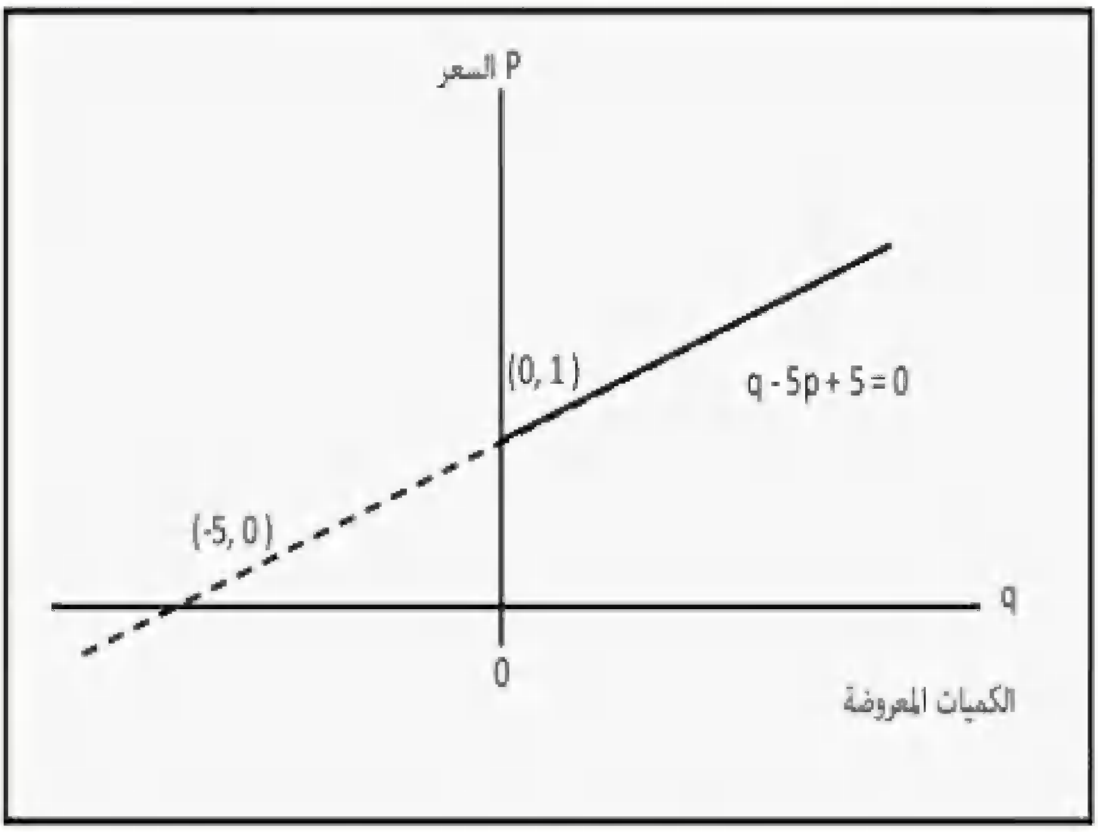
$$q = -5 + 5p$$

ولرسم هذه الدالة نحدد نقطتين كالآتي:

$$p= 1 , q= 0$$

$$q= -5 , p = 0$$

نرسم النقطتين(0,1)، (0 ,5-) لتحديد خط المعادلة كما في الشكل (2-6)




شكل رقم (2-6)

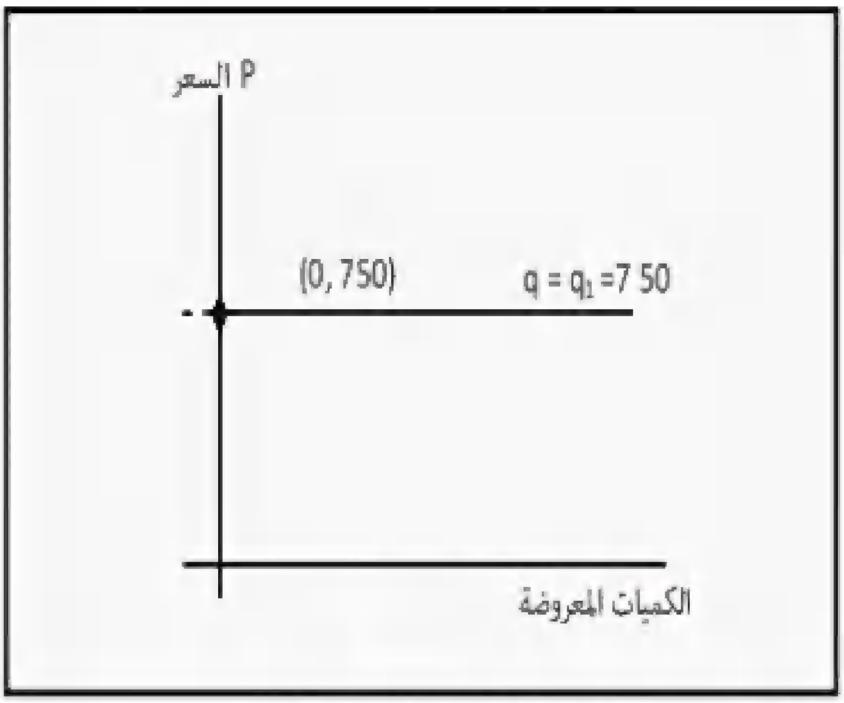
مثال(2):

جرى الاتفاق بين مؤسسة الكهرباء وشركة للدواجن على قيام المؤسسة بتجهيز الشركة بالكهرباء مقابل تسديد مبلغ قدره (750) ألف وحدة نقدية شهرياً، فما هي معادلة عرض الكهرباء؟

الجواب:

$$q = q_1 = 750$$

ومن ذلك يظهر بأن السعر بقي ثابتاً رغم أن الكميات المباعة (المستهلكة) من الكهرباء لتلبية حاجة شركة الدواجن مفتوحة أي إنها غير محددة ، والشكل رقم (2-7) يوضح هذه العلاقة :




## 2-5 دالة الاستثمار Investment Function

يعرف الاستثمار بمجموع ما ينفق على شراء السلع الرأسمالية الحقيقية. وفي الحياة اليومية قد يمتد التعريف ليشمل كل عمليات شراء الموجودات أو الالتزام بأية تعهدات يتحمل مقتنيها تضحية في البداية وتدفقات من الربح في المستقبل. مثال ذلك شراء أسهم أو إيداع مبلغ لقاء فائدة في مصرف أو زيادة التأهيل لدى معهد أو جامعة وغير ذلك. وعلى أية حال فإن الاستثمار يعني كما ورد في نظرية تحديد مستوى الدخل بما ينفق على شراء سلع الاستثمار. وبهذا المعنى فإن الاستثمار هو مقدار التغير في الموجودات الرأسمالية في الوحدة الاقتصادية أو على المستوى الوطني في حين تسمى الاستثمارات في غير ذلك كشراء الأوراق المالية وما شابهها استثمارات ظاهرية وليست حقيقية لأنها لا تؤدي إلى زيادة الطاقة الإنتاجية التي يولدها الاستثمار الحقيقي.

أما دالة الاستثمار فهي العلاقة التي تنسب الاستثمار إلى العوامل المحددة له كمستوى الدخل الوطني ومعدل التغير في المخزون ومعدل السعة الإنتاجية المنتفع بها* وغير ذلك من العوامل.

إن ابسط أنواع الدوال الاستثمارية هي التي تنسب المصروفات الاستثمارية إلى الدخل الكلي وكما في الصيغة الآتية:

$$I = f(y) \qquad (2\text{-}5)$$

حيث أن :

I = مستوى الاستثمار

$y$ = مستوى الدخل الوطني

أما إذا كانت العلاقة بصورتها الخطية فتكتب كما يلي :

$$I = a + by \qquad (2\text{-}6)$$

حيث أن : a يمثل الاستثمار المستقل الذي لا تتحد قيمته بالمتغيرات التي تطرأ على مستوى الدخل.

أما b : فهو الميل الحدي للاستثمار ويساوي:

$$\frac{\Delta I}{\Delta Y}$$

ويميل الكثير من الاقتصاديين إلى احتساب مستوى الاستثمار باعتباره دالة لمقدار التغير في الدخل الوطني وليس بمستوى هذا الدخل وبالصياغة الرياضية كالآتي:-

$$I = f(y_t - y_{t-1}) \qquad (2\text{-}7)$$

حيث أن :

t: يمثل فترة زمنية عادة ما تكون سنة واحدة لان عموم حسابات الدخل الوطني تعتبر السنة التقويمية الفترة الزمنية المناسبة لهذه الحاسبات.

---

* معدل السعة الإنتاجية المنتفع بها= $\dfrac{\text{الإنتاج الفعلي}}{\text{الطاقة الإنتاجية الحقيقية}}$

ولتوضيح الدالة (2-7) لنفرض أن 2009 = t فنحصل على ما يلي :-

$$I2009 = f\ (Y2009 - Y2009\text{-}1)$$

$$I2009 = f\ (Y2009 - Y2008)$$

أي إن الاستثمار في سنة 2009 هو دالة لدخل نفس السنة مطروحاً منه الدخل في السنة السابقة ويمكن كتابة الدالة بالصورة التالية:

$$I = f(\Delta y) \qquad (2\text{-}8)$$

حيث أن:

$$\Delta y = y_t - y_{t-1}$$

<u>مثال(1):</u>

قدرت دالة الاستثمار حسب الصيغة (2-6) في اقتصاد توسعي لسنة 2008 فوجد أنها بالصيغة الآتية :-

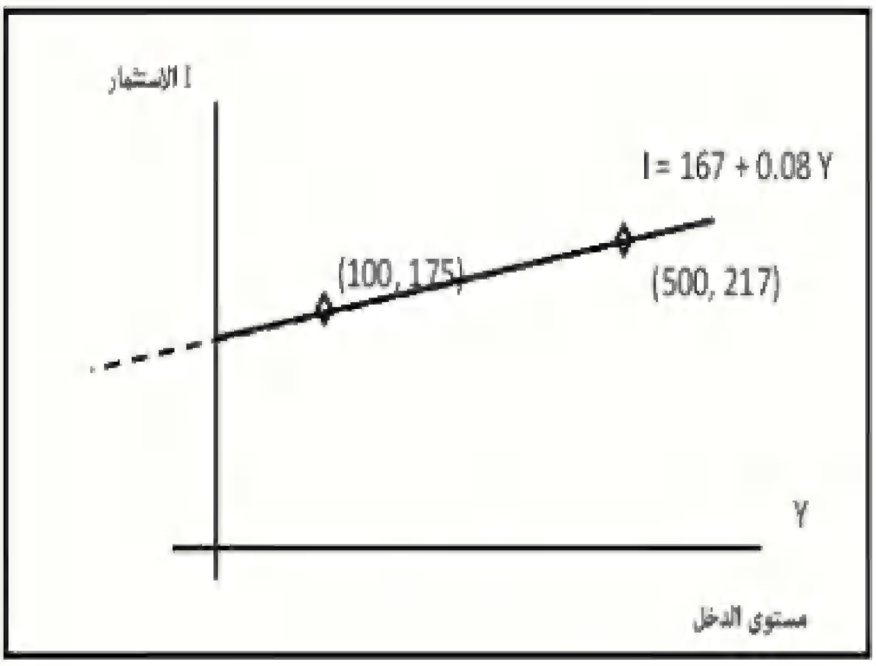
$$I = 167 + 0.08\ Y$$

ومن ملاحظة هذه الدالة يتبين لنا بأن:

الاستثمار المستقل (167) = a أي أن الحكومة تقوم باستثمارات قدرها (167) مليون وحدة نقدية بغض النظر عن مستوى الدخل الوطني. ويظهر من الدالة أن الميل الحدي للاستثمار (b=0.08) ويعني ذلك أن ما مقداره (8%) من الدخل القومي يوجه لأغراض الاستثمار.

وتظهر هذه الدالة بيانياً بالصورة المبينة في الشكل (2-8) :

| | | |
|---|---|---|
| Y | 500 | 100 |
| I | 217 | 175 |




شكل رقم (2-8)

مثال(2):

عند مستوى دخل وطني يبلغ (500) مليون وحدة نقدية كان مستوى الاستثمار (65) مليون وحدة نقدية وعندما ارتفع الدخل الوطني إلى (700) وحدة نقدية ارتفع الاستثمار إلى (83) وحدة نقدية فما هي معادلة الاستثمار؟ مثلها بالرسم.

الجواب:

بما أن دالة الاستثمار بشكلها المبسط هي:

$I = a+bY$ أو $I = f(Y)$

$$I - I_1 = \frac{I_2 - I_1}{Y_2 - Y_1}(Y - Y_1)$$

ولدينا:

$Y_1 = 500\ ,\ I_1 = 65$

$Y_2 = 700\ ,\ I_2 = 83$

فإن:

$$I - 65 = \frac{83 - 65}{700 - 500}(Y - 500)$$

$$I - 65 = \frac{9}{100}(Y - 500)$$

إذن دالة الاستثمار هي :

I = 20 + 0.09Y

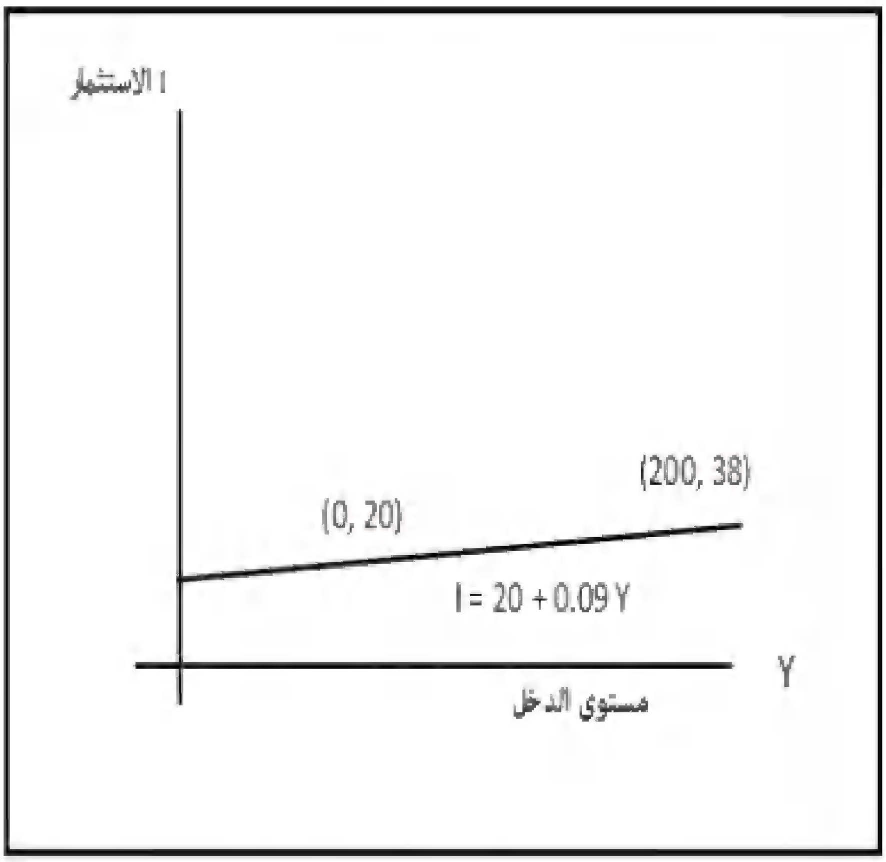
ولغرض تمثيل هذه المعادلة بيانياً نحدد النقطتين الآتيتين:

عندما **Y = 0** فأن: **I = 20**

وعندما **Y = 200** فأن: **I = 38**

أي أن النقطتين هما : **(0,20)**، **(200,38)**

وتظهر معادلة الاستثمار بيانياً كما في الشكل ( **2-9**)

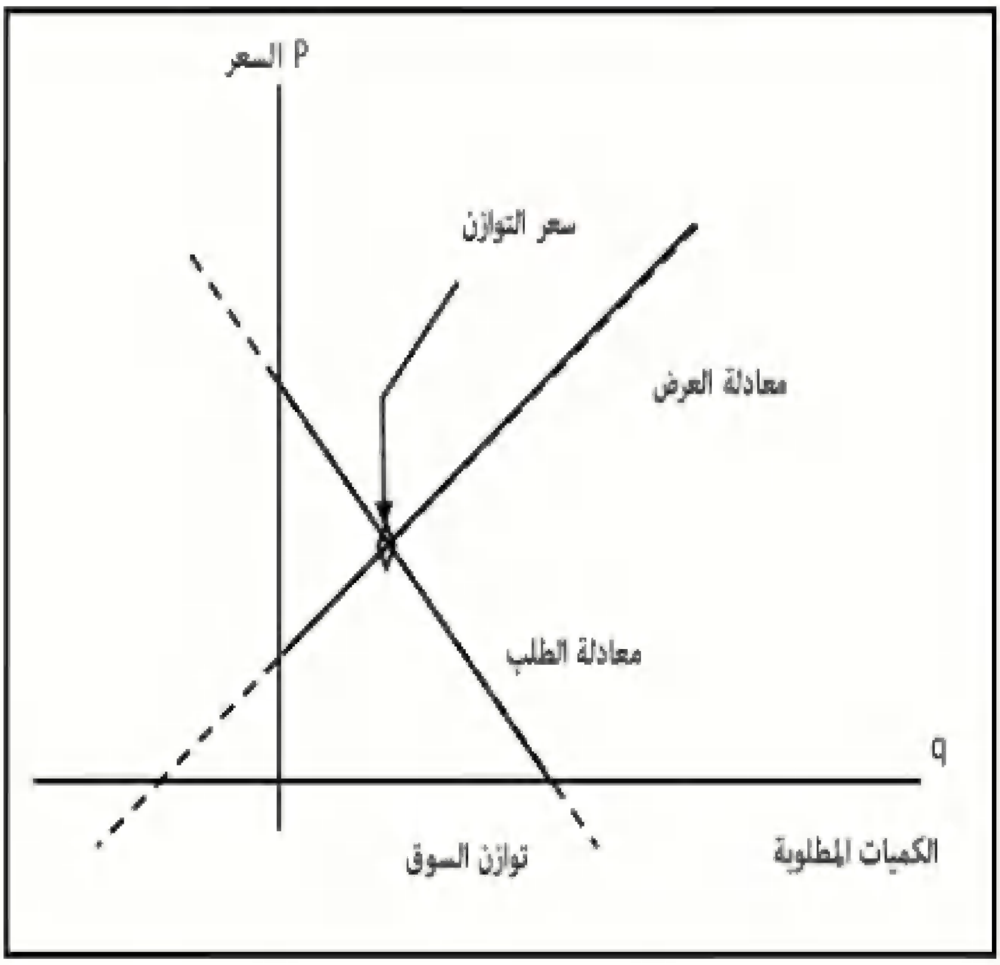



شكل رقم (2-9)

## 2-6 توازن السوق Market Equilibrium

يحدث توازن السوق عند سعر معين (نقطة) عندما تكون الكميات المطلوبة عندها مساوية للكميات المعروضة.

وبيانياً يظهر ذلك في الشكل (2-10) حيث تجتمع فيه معادلتا العرض والطلب معاً ويتم الاهتداء إلى التوازن عن طريق حل معادلتي العرض والطلب آنياً بشرط وجود نفس الوحدات (q , p) في المعادلتين: (وتمثل p : الأسعار ، q: الكميات المطلوبة أو المعروضة) وعموماً كي يكون للتوازن معنى اقتصادي ينبغي أن تكون قيم (q , p) أما موجبة أو صفراً أي إن منحنى كل من العرض والطلب يجب أن يتقاطعا في الربع الأول من الإحداثيات.




شكل رقم (2-10)

<u>مثال:</u>

في إحدى الأسواق كانت معادلتا الطلب والعرض كما يأتي :

$$q = 6 - 3p$$

$$q = 1 + 0.5p$$

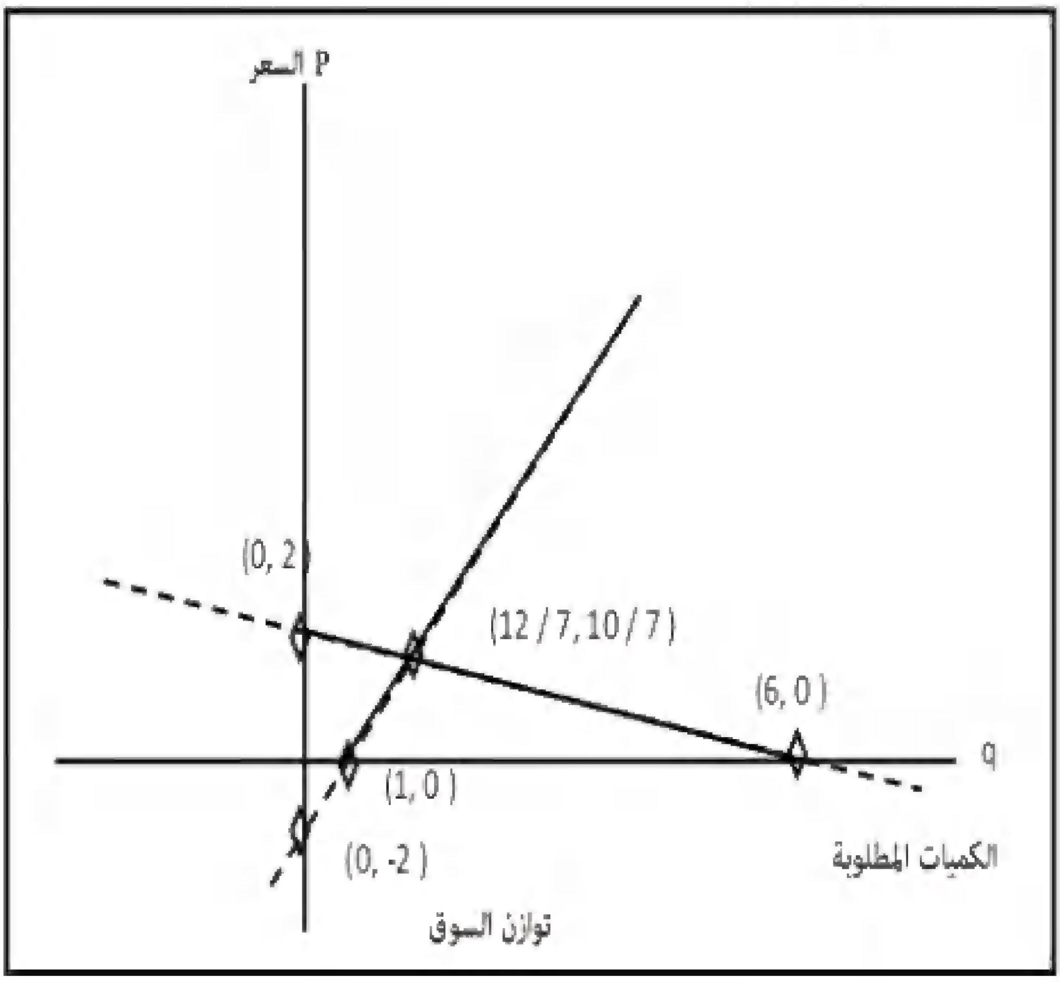
وبحل المعادلتين أعلاه نحصل على:

$$6 - 3p = 1 + 0.5p$$

$$p = \frac{10}{7}$$

$$q = \frac{12}{7}$$

إذن نقطة التوازن هي $\frac{12}{7}$ ، $\frac{10}{7}$ وسعر التوازن هو $\frac{10}{7}$ وبالرسم يظهر ذلك في الشكل (2-11) :




شكل رقم (2-11)

## 2-7 نقطة التعادل : Break – Even

قبل تعريف نقطة التعادل لابد من التطرق إلى دالة التكاليف ونبدأ بالقول بأن الكلفة الكلية تقسم إلى قسمين : الأول : التكاليف المتغيرة التي تنسب لحجم الإنتاج

(حجم المبيعات) وتتغير بتغيره كالمواد الأولية. والثاني: التكاليف الثابتة التي لا تتغير بتغير الإنتاج بل تبقى ثابتة مثل الأبنية والمكائن والمعدات وغيرها. وبذلك تكون دالة التكاليف بالصيغة الآتية:

$$c = a + bq \qquad (2 - 9)$$

حيث أن (c) يمثل حجم التكاليف الكلية و(q) حجم المبيعات و(a) التكاليف الثابتة أما(b) فهو انحدار التكاليف ويمثل التكاليف المتغيرة لكل وحدة نقدية من المبيعات ولهذا فإن ( bq) يشير إلى التكاليف المتغيرة.

وفي ضوء ذلك فإن نقطة التعادل هي النقطة التي عندما يتساوى حجم المبيعات مع التكاليف. أي أنها النقطة التي عندها تكون الشركة لا رابحة ولا خاسرة. فإذا تقرر أنه تكون نقطة تعادل مستوى المبيعات عند($q_e$) فإن كل من(c , q) يساوي ($q_e$) لنضرب مثلاً توضيحياً:

<u>مثال(1):</u>

نفترض دالة التكاليف كانت:

$$c = 550 + 0.45\ q$$

إذن عند نقطة التوازن ($q_e$) تكون الدالة بالصيغة الآتية :

$$qe = 550 + 0.45\ qe$$

$$qe - 0.45qe = 550$$

$$0.55\ qe = 550$$

$$q_e = \frac{550}{0.55} = 1000$$

وبذلك نستنتج أن نقطة التعادل التي تساوي عندها قيمة المبيعات مع التكاليف الكلية هي:

$$q_e = 1000$$

وبصورة عامة فإن الدالة (2-9)عندما تكون في نقطة التعادل يمكن كتابتها بالصيغة التالية:

$$q_e = a + bq_e \qquad (2\text{-}10)$$

$$q_e = \frac{a}{1-b}$$

لنأخذ مثلاً أخر :

<u>مثال(2):</u>

قدرت إحدى الشركات مبيعاتها لفترة القادمة بمقدار (40) ألف وحدة نقدية وتكاليفها الثابتة بمقدار 7.5 ألف وحدة نقدية والمتغيرة بمقدار(25) ألف وحدة نقدية والمطلوب : (أ) استخراج معادلة التكاليف واثبات بأن نقطة التعادل هي (25) ألف وحدة نقدية . (ب) حساب مقدار أرباح الشركة إذا كانت مبيعاتها (24) ألف وحدة نقدية ومقدار خسائرها أذا خفضت إنتاجها إلى (15) ألف وحدة نقدية.

<u>الجواب:</u>

**(أ) نستخرج دالة التكاليف :**

التكاليف الثابتة $q = 7.5$

التكاليف المتغيرة $= b = \frac{25}{40} = \frac{5}{8} = o.625$

$$c = 7.5 + 0.625\,q$$

وعندما c = q عند نقطة التعادل $q_e$ فإن مستوى المبيعات والتكاليف تكون حسب الصيغة (2-10)

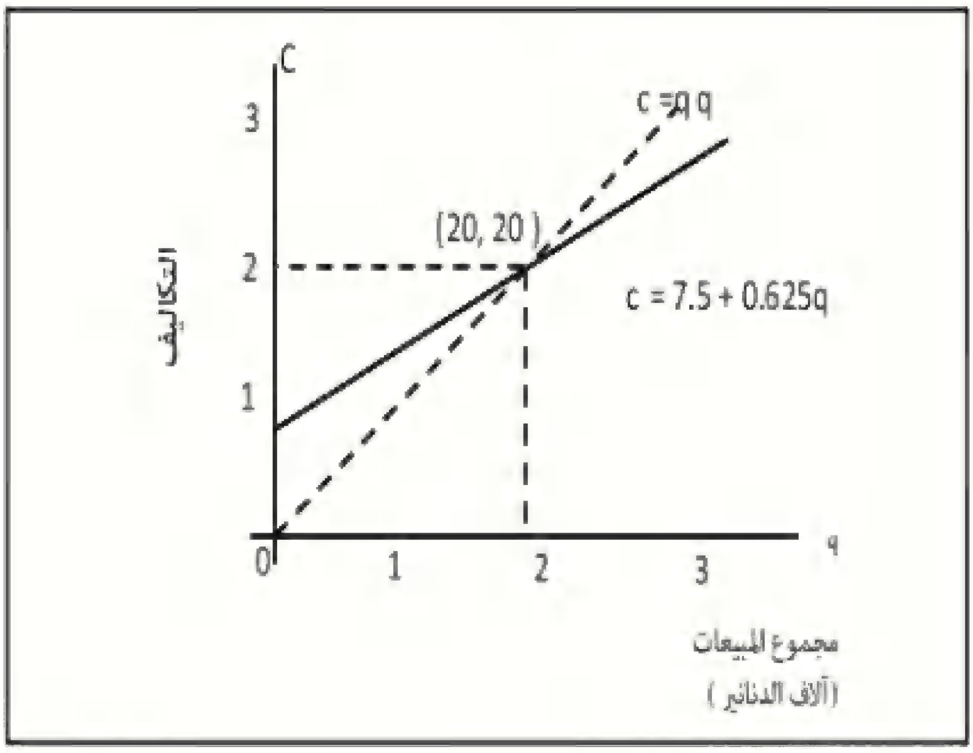
كما يلي :

$$q_e = \frac{a}{1-b}$$

$$= \frac{7.5}{1-0.625}$$

ألف وحدة نقدية 20= وهي نقطة التعادل

كما مبين في الشكل رقم (2-12) الآتي:




الشكل رقم (2-12)

**(ب) مقدار أرباح الشركة أذا كانت مبيعاتها (24) نحسب أولاً التكاليف:**

$c = 7.5 + 0.625\ q$

$= 7.5 + 0.655(24)$

ألف وحدة نقدية 22.3=

إذن الأرباح: $q - c = 24 - 22.5 = 1.5$ ألف وحدة نقدية

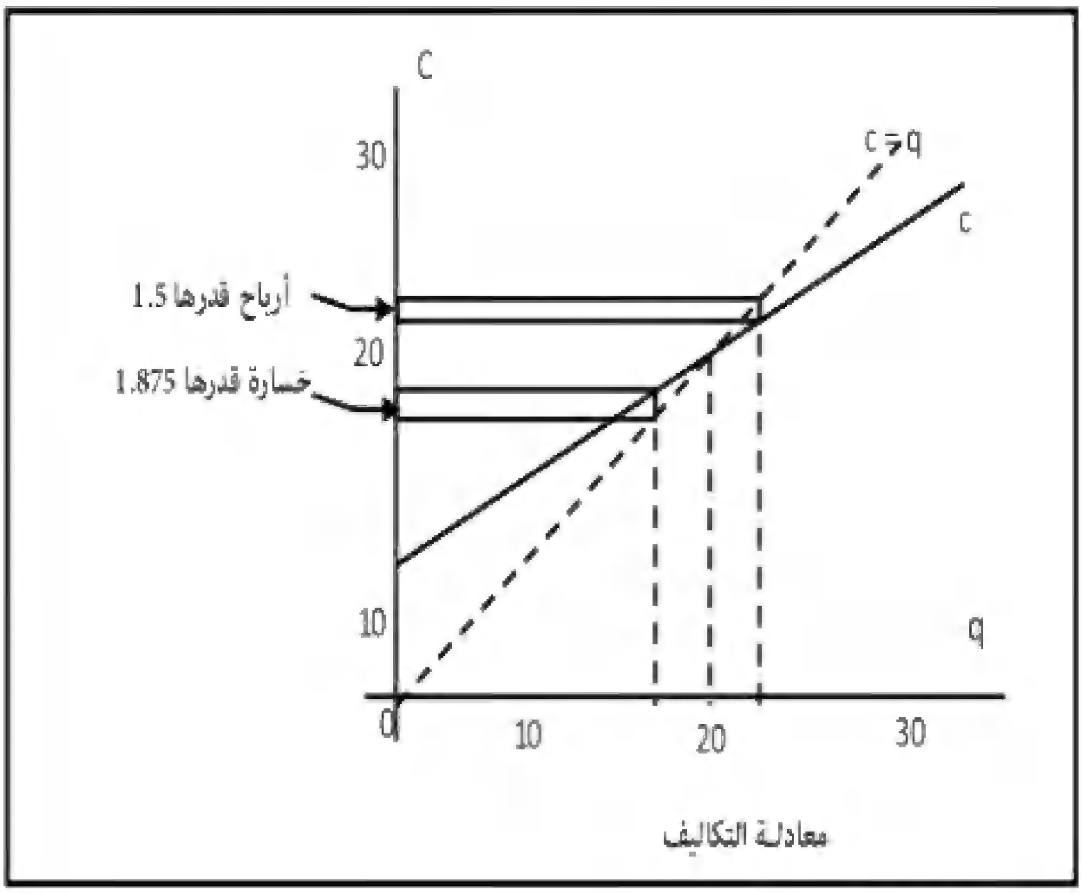
أما إذا خفضت الشركة مبيعاتها إلى (15) فإن خسائرها تكون:

$$c = 7.5 + 0.652q$$

$$= 7.5 + 0.625(15)$$

ألف وحدة نقدية $16.875 =$

إذن الخسائر: $q\text{-}c = 15 - 16.875 = (1.875) =$




شكل رقم (2-13)

إن نقطة التعادل تقوم على فرضية أن التكاليف تقسم إلى قسمين الأول: التكاليف المتغيرة التي تشكل نسبة من المبيعات وتتغير بتغيرها والثاني: التكاليف الثابتة: التي تبقى ثابتة مع تبدل مستوى المبيعات. ولكن هذه الفرضية لا تصح دائماً في الحياة العملية حيث يلجأ المنتج إلى تخفيض تكاليفه الثابتة بشتى الوسائل عندما يواجه الانخفاض في

مبيعاته الفعلية عن المتوقعة ، ولكن بشكل عام ولأغراض تحليل نقطة التعادل يفترض عدم تغير التكاليف الثابتة بتغير مستوى المبيعات.

## 2-8 دالة المنفعة Utility Function

تعرف المنفعة بأنها مقدار الإشباع المستحصل من استهلاك وحدات من سلعة معينة.

أما دالة المنفعة فهي العلاقة بين المنفعة التي يكسبها المستهلك من جراء استهلاكه سلع معينة وبين كمية هذه السلع. وبصيغة رياضية يمكن تمثيل العلاقة بالصورة التالية :

$$U = f(q_1, q_2) \qquad (2\text{-}11)$$

حيث أن :

U : مستوى المنفعة.

$q_1, q_2$: تمثل كمية من سلعتين فقط من مجموع السلع التي تقع في متناول المستهلك.

إن النظرية الحديثة للمنفعة تفترض حجماً ترتيبياً للمنفعة وذلك إذا كانت لدينا سلعتان مثل $q_1$، $q_2$ فإن المستهلك أما أن يستهلك السلعة $q_1$ أو السلعة $q_2$ أو جزء من الأولى وجزء من الأخرى بنسب مختلفة ولكن يفترض انه غير قادر على تحديد أرقام تمثل كمية المنفعة للبدائل المختلفة.

إن تصنيف المستهلك لتفضيلاته من السلع تصاغ رياضياً كما في العلاقة(2-11). ويدرج في دالة المنفعة رقماً معيناً (منفعة) مع كل كمية من السلع المستهلكة ولكن هذه الأرقام تمثل فقط رصفاً أو ترتيباً للمفاضلات فإذا كانت منفعة $q_1$ (وهي بديل $q_2$) تساوى (24) ومنفعة $q_2$ (هي بديل $q_1$) تساوي (8) فإن السلعة $q_1$ تفضل على السلعة $q_2$ ولكن ليس صحيحاً أن نقول أن السلعة $q_1$ تفضل ثلاث مرات على السلعة $q_2$. إن دالة المنفعة دالة مستمرة وهذا ما سنأتي عليه في فصل لاحق ونكتفي بالإشارة إلى صيغتها العامة في (2.11).

## 2-9 دالة الإنتاج Production Function

تعرف دالة الإنتاج بأنها شكل العلاقة بين كمية الإنتاج (out put) من سلعة وكمية المستخدمات (inputs) اللازمة لإنتاجها.

$$X = f(a_1, a_2, ..., a_n) \quad (2\text{-}12)$$

حيث أن :

X : مستوى الإنتاج.

$a_1, a_2, ..., a_n$: تمثل n من المستخدمات (عوامل الإنتاج) مثل العمل والمكائن والمواد الأولية وغيرها.

والصيغة (2-12) هي الصيغة العامة لدالة الإنتاج.

وكثيراً ما نلاحظ في الأدبيات الاقتصادية دالة الإنتاج بالصورة التالية:

$$Q = (K, R, L, T) \quad (2\text{-}13)$$

حيث أن :

Q = الدخل الوطني (الناتج).

K = رأس المال.

R = الأرض (المصادر الطبيعية).

L = رأس المال البشري أي العمل.

T = التكنولوجيا.

وإذا افترضنا أن رأس المال والأرض والتكنولوجيا ثابتة في الأجل القصير فإن الدالة (2-13) تؤول إلى :

$$Q = f(L) \quad (2\text{-}14)$$

إن الدوال الإنتاجية الأنفة الذكر قد تكون من الدرجة الأولى (خطية) وقد تكون غير خطية (درجتها أعلى من الواحد كأن تكون من الدرجة الثانية والثالثة .. الخ) وعندما تكون دالة الإنتاج خطية فإن الدالة (2-14) يمكن أن تكتب بالشكل التالي :

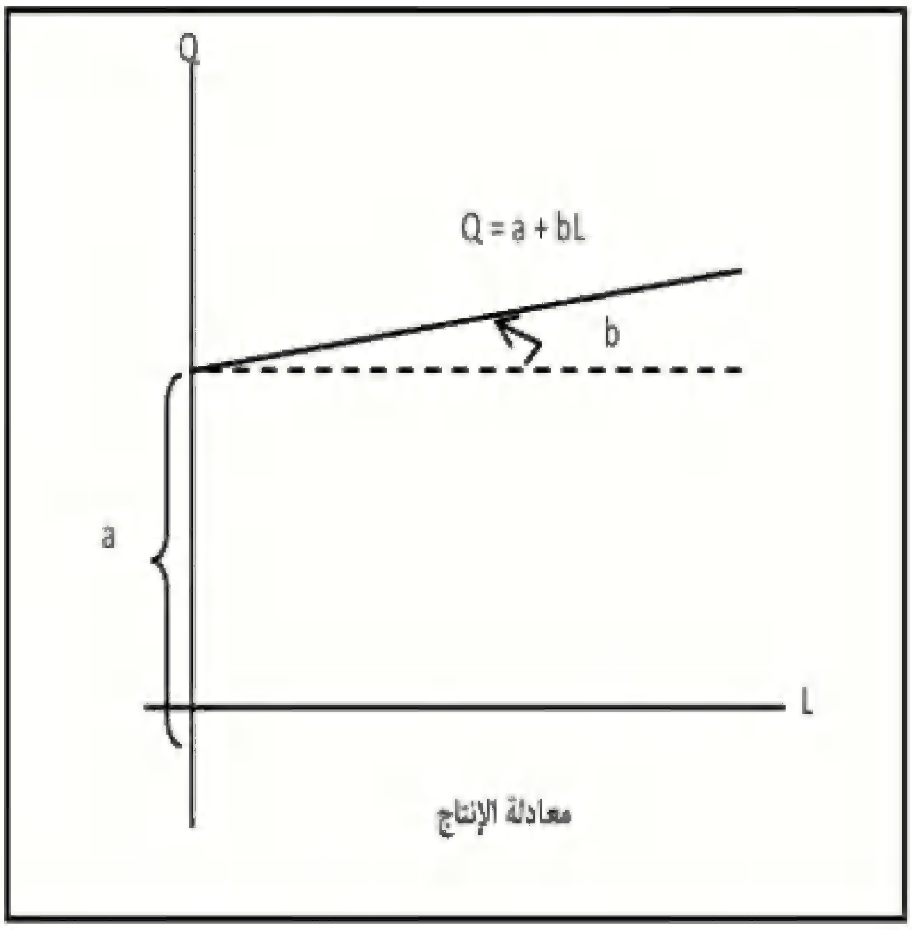
$$Q = a + bL \qquad (2\text{-}15)$$

حيث أن :

a = مقدار ثابت ويسمى محصور - Q كما مر شرحه.

b = ثابت معلمي ، وهو ما نسميه بالميل الحدي للإنتاج.

وعندما تمثل الدالة (2-15) بيانياً فإنها تظهر كما في الشكل (2-14).




شكل رقم (2-14)

وهناك أنماط أخرى من الدوال الإنتاج مثل دالة (كوب - دوكلاص) وغيرها سنأتي عليها في الفصول القادمة.

## 2-10 دالة الاستيرادات Imports Function

وهي العلاقة بين قيمة المستورد من السلع والخدمات وبين العوامل المؤثرة على ذلك. وكثيراً ما تكون تلك العوامل هي حجم الاستهلاك الكلي والاستثمار لان الاستيرادات توجه عادة إلى هذين الجانبين من العناصر الطلب النهائي وإذ ما سلمنا بهذا القول فإن دالة الاستيرادات تبدو بشكلها الرياضي كالآتي :

$$M = f(C, I) \qquad (2\text{-}16)$$

حيث أن :

M = الاستيرادات من السلع والخدمات.

C = الاستهلاك الكلي.

I = الاستثمار الكلي.

ويمكن أن تكون هناك عوامل أخرى تؤثر في مستوى الاستيرادات لا مجال هنا لبحثها. وفي بعض الدوال ذات المتغير الواحد يكون مستوى الدخل الوطني المؤثر الوحيد على الاستيرادات ، وتأخذ الدالة وفق هذه الفرضية الصيغة المبسطة التالية:

$$M = f(Y) \qquad (2\text{-}17)$$

حيث أن Y= مستوى الدخل الوطني.

وإذا كانت هذه الدالة خطية فيمكن أعادة كتابتها كما يلي:

$$M = a + bY$$

a = ثابت.

b = ميل الدالة ويمثل الميل الحدي للاستيراد ويكون :

$$0 < b < 1$$

## 2-11 دالة الصادرات **Exports Function**

تعرف الصادرات بأنها السلع والخدمات المنتجة من قبل بلد معين والمباعة لبلـد أخـر مقابـل شراء سلع وخدمات يمتلكها ذلك البلد أو لقاء عملات أجنبية أو ذهب أو مقابل تسوية ديون بين البلـدين. أمـا دالة الصادرات فهي العلاقة بين قيمة الصادرات وبين العوامل المـؤثرة فيهـا ومنهـا حجـم الـدخل الـوطني وحجم الاستيرادات أو أسعار السلع في السوق العالمية وغيرها من العوامل.

وبشكل مبسط تكون دالة الصادرات دالة للدخل الوطني وحسب الصيغة الآتية:

$$E = a + bY \qquad (2\text{-}18)$$

حيث أن E يمثل حجم الصادرات و Y يمثل الدخل الوطني وa ثابت عددي و b ثابت معلمي ويعرف بالميل الحدي للصادرات.

## 2-12 دوال اقتصادية أخرى **Other Economic Function**

هناك الكثير من الدوال الاقتصادية التي توضح العلاقة بين متغيرات اقتصادية عديدة تأخـذ صـيغة العلاقة الخطية كدالة الطلب عـلى النقـود أو دالـة عـرض النقـد ودالـة الـضرائب ودالـة المخـزون وغيرهـا ونكتفي بالدوال التي وردت في هذا الفصل وسيتم التطرق إلى دوال أخرى خلال فصول الكتاب القادمة.

### تمارين (1 - 2)

**1- إذا كان حجم الدخل الوطني ( Y) يساوي (1500) وحجم الاستهلاك الثابت الذي يتحقق بغـض النظر حجم الدخل الوطني (400 ) ونسبة ما يستهلك من الدخل خلال الفترة (70%).**

المطلوب إيجاد :

أ- دالة الاستهلاك.

ب- حجم الاستهلاك عندما يكون حجم الدخل الوطني (2000) .

ج- رسم الدالة المستخرجة في الفقرة ب.

**2- إذا كان منحنى الطلب على سلعة ما هو :**

$q = - 0.4p$

حيث أن q يمثل الكميات المطلوبة و p السعر ، جد ما يأتي :

أ- مستوى السعر أذا كانت الكميات المطلوبة : 6,12,14 .

ب- مقدار الكميات المطلوبة أذا كان السعر :25,7,3 .

ج- ما هو أعلى سعر يمكن أن يدفع بهذه السلعة؟

د-أية كميات يمكن أن تطلب أذا أصبح السعر حراً؟

ه-أدنى سعر يمكن أن تسوق به السلعة .

و-ارسم معادلة الطلب (منحنى الطلب) .

**3- اذكر أي من المعادلات آلاتية يمثل الطلب وأي منها يمثل منحنى العرض وأي منها لا يمثل منحنى الطلب ولا منحنى العرض:**

أ- $q = 3p - 1$

ب- $q + 2p + 9 = 0$

ج- $q - p = 0$

د- $q - 7 = 0$

ه- $p = 11$

و- $q = -5p - 6$

**4- حل المعادلات الآتية جبرياً ثم تحقق من النتائج عن طريق تحويلها إلى نقطة توازن السوق بالأسعار والكميات.**

أ- $q = 8 - 3p$

$q = 2 + 2p$

ب- $q = 8 - \frac{3}{4}p$

$q = -4 + \frac{1}{2}p$

**5- قررت إدارة إحدى المصانع في خطة إنتاجها بيع الوحدة الواحدة من السلع المنتجة بسعر (15) وحدة نقدية جد ما يأتي :**

أ- ما هي مجموع عائدات المصنع إذا باع (4500) وحدة ؟

حدد دالة العائدات وارسمها.

ب- وبافتراض أن التكاليف الثابتة هي (25) ألف وحدة نقدية بغض النظر عن أي كمية ينتجها المصنع اعد رسم الدالة التي تم رسمها في الفقرة (أ) أعلاه.

ج- إذا كانت التكاليف المتغيرة تشكل ما نسبة 0.54 من مجموع العائدات وان التكاليف الثابتة معطاة في الفقرة (ب) حدد نقطة التعادل مستخرجاً الكميات المباعة التي عندها تحصل هذه النقطة وارسم الخط البياني لها.

د- من الفقرة (ج) إذا باع المصنع (5000) وحدة ما هي الأرباح التي يجنيها وإذ قلص إنتاجه إلى (2500) وحدة وما هي الخسائر التي يتكبدها؟

**6- اعد متخصص في الاقتصاد الكلي نموذجاً " خطياً" للاقتصاد الوطني ضم المعادلات الخطية الآتية :**

أ- $c = 80 + 0.7Y$

ب- $I = 35 + 0.12Y$

ج- $M = 25 + 0.1Y$

د- $E = 10 + 0.08Y$

هـ- $Y = C + I + E - M$

جد ما يأتي :

أ- إذا كان مستوى الدخل الوطني (500) جد كل من الاستهلاك (C)والاستثمار (I) و الاستيرادات (M) والصادرات (E)

ب-ماذا نستنتج من الحل ؟

ج- هل يمكن حل النموذج واستخراج مستوى الدخل الوطني دون أن نزود بمستوى هذا الدخل؟

# الفصل الثالث

# المصفوفات الجبرية

Matrix Algebra

94

# المصفوفات الجبرية

# Matrix Algebra

## 3-1 مقدمة

يحتل موضوع المصفوفات الجبرية أهمية كبيرة في التحليلات الاقتصادية لما يقدمه من وسائل وطرق وأساليب تساعد كثيرا على حل المسائل الاقتصادية وخاصة تلك التي تتضمن مجموعة من العلاقات الآنية بين المتغيرات.

إن الوسائل التي توفرها المصفوفات الجبرية على سبيل المثال تستخدم في تناول مواضيع عدة منها تحليل المستخدم - المنتج وتحليل التوازن الجزئي وتبسيط جوانب معقدة من النماذج الاقتصادية التي يظهر فيها السعر والدخل والاستخدام كمتغيرات وغير ذلك.

كما تبرز أهمية المصفوفات الجبرية في الإحصاء عند تناول موضوع الانحدار والارتباط والاختبارات اللازمة للمعالم المقدرة من خلال نظام المصفوفات والموجهات.

وقد احتلت المصفوفات الجبرية في العقود الأخيرة مكانة بارزة كوسيلة فعالة في كل من العلوم النظرية والتطبيقية على حد سواء من خلال النظام المناسب الذي تحتويه هذه المصفوفات في معالجة العلاقات بين الأعداد حيث يتضمن النظام المذكور الرموز الملائمة التي يمكن بواسطتها ضغط الأعداد وتكثيفها بشكل يشبه إلى حد ما طريقة الاختزال التي تستخدم في الكتابة السريعة إضافة إلى أن قواعد نظام المصفوفات وعملياته قليلة ومبسطة مما أشاع استخدامها لهذا أصبحت الحاجة إلى التعرف على المصفوفات الجبرية مهمة ومشجعة والتي سنتناولها خلال هذا الفصل الذي يتضمن معنى المصفوفة والموجه وأنواع المصفوفات وطرق عكس المصفوفة والمحددات وكيفية استخدام كل هذا في المعادلات الخطية الآنية.

## 3-2 تعريف

المصفوفة هي نظام مستطيل الشكل لصف من الأرقام تكتب كالآتي:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots a_{mn} \end{bmatrix}$$

وتوضع عناصر المصفوفة عادة بين قوسين مضلعين [ ] وتتكون المصفوفة من مجموعة العناصر التي يرمز لها بالحرف a ويلاحظ أن a هي عنصر في الصف ( i ) والعمود ( j ) من المصفوفة التي أطلقنا عليها اسم A ويرمز أحيانا للمصفوفة A بـ $(a_{ij})$ أو $\{a_{ij}\}$وتدعى المصفوفة التي تحتوي على (m) من الصفوف و (n) من الأعمدة بمصفوفة $m \times n$ أو مصفوفة ذات نظام $m \times n$ وتكتب أحيانا بـ وإذا كانت m= n فإن المصفوفة تكون مربعة وتكتب $n \times An$.

**أمثلة**

<u>مثال(1):</u>

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 5 \\ -1 & 3 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

هي مصفوفة ذات صفين وأربعة أعمدة وتسمى اختصارا مصفوفة 2x4.

<u>مثال(2):</u>

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$ مصفوفة $3 \times 2$

مثال(3):

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$$ مصفوفة $3 \times 2$

مثال(4):

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$$ مصفوفة $2 \times 2$

أو مصفوفة مربعة ( Square Matrix) أما المصفوفة التي فيها $n \neq m$ فتسمى مصفوفة مستطيلة.

## 3-3 المصفوفات المتطابقة Identical Matrices

تسمى المصفوفتان ذات النظام الواحد متطابقتان إذا وإذا فقط كانت عناصرهما المتناظرة متساوية.

مثال:

إذا كانت لدينا:

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

كان A=B (3-1)

## 3-4 المتجهات Vectors

تسمى المصفوفة التي تحتوي على عمود واحد فقط أي مصفوفة ذات $1 \times m$ بالمتجه العمودي ويكتب كالآتي:

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \qquad (3\text{-}2)$$

ويحتوي المتجه u على $u_i$ من العناصر - ويسمى المتجه العمودي الذي يحتوي على m من الصفوف بالمتجه ذو البعد - m.

آما المصفوفة التي تحتوي على صف واحد فقط أي مصفوفة n×1 فتسمى بالمتجه الأفقي ويكتب كالآتي:

$$V = [V_1, V_2, ..., V_n] \quad (3\text{-}3)$$

ويحتوي المتجه V على $V_i$ من العناصر ، ويسمى المتجه الأفقي الذي يحتوي على n من الأعمدة بالمتجه ذو البعد - n.

**أمثلة**

<u>مثال(1):</u>

$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ مصفوفة 3×1 وهي متجه عمودي ذو 3 أبعاد.

<u>مثال(2):</u>

$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ مصفوفة 4×1 وهي متجه عمودي ذو 4 أبعاد.

<u>مثال(3):</u>

$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ مصفوفة 1×3 وهي متجه أفقي ذو 3 أبعاد.

<u>مثال(4):</u>

$\begin{bmatrix} 7 & 4 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ مصفوفة 1×5 وهي متجه أفقي ذو 5 أبعاد.

## 3-5 المتجهات المتطابقة Identical Vectors

يكون المتجهان الأفقيان: اللذان يحتويان على نفس الصفوف متطابقان إذا وإذا فقط كانت لدينا عناصرهما المتناظرة متساوية.

مثال:

إذا كانت لدينا المصفوفات الآتية فإن:

A = [2,1,5]

B = [3,1]

C = [2,1,5]

$$D = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

فإن: A = C ولكن $A \neq B \neq D$ و $B \neq C \neq D$

## 3-6 العمليات الأساسية للمصفوفة Basic Matrix Operations

### 3-6-1 جمع وطرح المصفوفات

**Matrices Addition and Subtraction of**

يمكن جمع أو طرح مصفوفتين أو أكثر إذا وإذا فقط كانتا ذات نظام واحد وإن مجموع أو الفرق بين مصفوفتين( $n \times m$ ) ينتج عنها مصفوفة ( $n \times m$) أيضا وإن عناصر المصفوفة الجديدة هي مجموع أو الفرق بين العناصر المتناظرة للمصفوفتين الأوليتين فإذا كان لدينا:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{m1} \cdots a_{mn} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} \cdots b_{1n} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ b_{m1} \cdots b_{mn} \end{bmatrix}$$

فإن:

$$A+B=C \qquad (3\text{-}4)$$

حيث أن:

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} \cdots a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1} b_{m1} \cdots a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

لنأخذ بعض الأمثلة:

مثال(1):

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

مثال(2):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 0 \\ 7 & 1 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & -5 \\ 6 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

مثال(3):

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 11 \\ 3 \end{bmatrix}$$

مثال(4):

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \end{bmatrix}$$

مثال(5):

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ -7 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

مثال(6):

$$\begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

### 3-6-2 ضرب المصفوفة Multiplication of Matrix

**أ-** ضرب المصفوفة بمعداد (Scalar)

يعرف المعداد (Scalar) بأنه مصفوفة ذات نظام $(1\times 1)$ عند معاملتها معاملة المصفوفات أي أنها قيمة غير اتجاهيه.

إن نتيجة ضرب أية مصفوفة بالمعداد هي المصفوفة نفسها مضروب كل عنصر فيها بهذا المعداد (رقم ثابت ).

وبالرموز إذا كانت لدينا:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11}\cdots a_{1n} \\ \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}\cdots a_{mn} \end{bmatrix}$$

وأردنا ضرب هذه المصفوفة بعدد ثابت (معداد- Scalar) هو **k** فإن:

$$k\times Am\times n=\begin{bmatrix} ka_{11}\cdots ka_{1n} \\ \vdots \qquad \vdots \\ ka_{m1}\cdots ka_{mn} \end{bmatrix}=k\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$$

$$=(ka_{ij})_{m\times n} \qquad (3\text{-}5)$$

**أمثلة**

مثال(1):

$$4\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 20 & 12 \\ 0 & 28 \end{bmatrix}$$

مثال(2):

$$-2\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ -8 \end{bmatrix}$$

مثال(3):

$$d[3 \quad -2 \quad 7] = [3d \quad -2d \quad 7d]$$

مثال(4):

$$5\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

**ب-** ضرب المصفوفة بمصفوفة أخرى

يمكن ضرب مصفوفتين إذا وإذا فقط كان عدد الأعمدة (Columns) في المصفوفة الأولى مساويا لعدد الصفوف (Rows) في المصفوفة الثانية وتسمى المصفوفتان( A , B ) مكيفتين للضرب إذا كان عدد الأعمدة في (A ) مساويا لعدد الصفوف في(B ). أما حاصل الضرب فهو مصفوفة تحتوي على نفس عدد صفوف المصفوفة ( A ) ونفس عدد الأعمدة في المصفوفة (B ).

لذلك فإن:

$$A_{m\times n}.B_{n\times k} = C_{m\times k}$$

قواعد هامة:

1- إن حاصل ضرب متجه أفقي ذو نظام $1\times n$ بمتجه عمودي ذو نظام $n\times 1$ هو معداد (Scalar).

ذلك:

$$a_{1\times n}.b_{n\times 1} = c_{1\times 1} \qquad (3\text{-}6)$$

2- إن تتابع عملية ضرب المصفوفات مهمة جدا ذلك لان ضرب المصفوفة $A_{m\times n}$ والمصفوفة $B_{n\times m}$ يمكن أن تتم بحالتين هما $A_{m\times n}.B_{n\times m}$ أو $B_{n\times m}.A_{m\times n}$

الجزء الأول

ولكن في النتيجة $AB \neq BA$ وتجنبا لذلك يتعين الانتباه لهذه القضية. ففي حالة ضرب AB فإن المصفوفة A تسمى المضروب مقدما ( Pre multiply) والمصفوفة B تسمى بالمضروب لاحقا ( Post multiply ) وبترتيب ذلك يمكن تجنب الوقوع في خطأ تتابع عملية الضرب.

أما كيفية ضرب مصفوفتين يمكن توضيحها بالرموز كالآتي:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}_{3\times2} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}_{2\times3}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22} & a_{31}b_{13}+a_{32}b_{23} \end{bmatrix}_{3\times3}$$

**أمثلة**

<u>مثال(1):</u>

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}_{3\times2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times3} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2\times1+1\times3=5 & 2\times3+1\times0=6 & 2\times2+1\times1=5 \\ 1\times1+2\times3=7 & 1\times3+2\times0=3 & 1\times2+2\times1=4 \\ 5\times1+0\times3=5 & 5\times3+0\times0=15 & 5\times2+0\times1=10 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 6 & 5 \\ 7 & 3 & 4 \\ 5 & 15 & 10 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

مثال(2):

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}_{2\times3} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}_{3\times2} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}_{2\times2}$$

مثال(3):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 3 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}_{4\times2} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}_{2\times4} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -5 \\ 2 & 6 & 6 & 7 \\ -2 & 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}_{4\times4}$$

مثال(4):

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}_{2\times4} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 3 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}_{4\times2} = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 1 & -10 \end{bmatrix}_{2\times2}$$

ملاحظة هامة:

إن المصفوفتين في المثال رقم (3) و(4) هما نفسهما ولكن أعيد ترتيبهما فكانت النتيجة مختلفة.

إن ضرب ثلاث مصفوفات أو أكثر لا يؤثر على النتيجة بغض النظر عن أي منهما سيضرب أولاً بالآخر شريط مراعاة ترتيبها ، وبالرموز يمكن توضيح ذلك كما يلي:

$$(A_{m\times n}.B_{n\times k})C_{kp} \quad A_{m\times n}(B_{n\times k}.C_{kp}) = A_{m\times n}.B_{n\times k}.C_{kp} = \qquad (3\text{-}7)$$

أما في حالة جمع وطرح مصفوفتين فيكن استبدال ترتيبهما دون أن تتأثر النتائج أي أن:

$$A \pm B = B \pm A \qquad (3\text{-}8)$$

و $$A \pm B \pm C = A \pm (B \pm C) = (A \pm B) \pm C \qquad (3\text{-}9)$$

في حين ليس لعملية ضرب المصفوفات هذه الصفة التبادلية ذلك $AB \neq BA$ ولكن كما ذكرنا يمكن ضرب أي من المصفوفات التالية دون الإخلال بالترتيب:

$$ABC = (A(BC) = (AB)C$$

دعنا نتناول بعض الأمثلة:

مثال(1):

$$\begin{bmatrix}1\\0\\-2\end{bmatrix}_{3\times1}\begin{bmatrix}0 & 2 & 1\end{bmatrix}_{1\times3}\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\5 & 0 & 1\\0 & 4 & 3\end{bmatrix}_{3\times3}=\begin{bmatrix}0 & 2 & 1\\0 & 0 & 0\\0 & -4 & -2\end{bmatrix}_{3\times3}\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\5 & 0 & 1\\0 & 4 & 3\end{bmatrix}_{3\times3}$$

$$=\begin{bmatrix}10 & 4 & 5\\0 & 0 & 0\\-20 & -8 & -10\end{bmatrix}_{3\times3}$$

مثال(2): كبديل لتسلسل عملية الضرب في المثال (1) نحصل على:

$$\begin{bmatrix}1\\0\\-2\end{bmatrix}_{3\times1}\begin{bmatrix}0 & 2 & 1\end{bmatrix}_{1\times3}\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\5 & 0 & 1\\0 & 4 & 3\end{bmatrix}_{3\times3}=\begin{bmatrix}1\\0\\-2\end{bmatrix}_{3\times1}\begin{bmatrix}10 & 4 & 5\end{bmatrix}_{1\times3}=\begin{bmatrix}10 & 4 & 5\\0 & 0 & 0\\-20 & -8 & -10\end{bmatrix}_{3\times3}$$

وهي نفس النتيجة.

## 3-7 نماذج خاصة من المصفوفات

### 3-7-1 المصفوفة القطرية Diagonal Matrix

تعرف المصفوفة القطرية بأنها مصفوفة مربعة كافة عناصرها أصفارا ماعدا العناصر الواقعة على قطرها الرئيسي الممتد من أعلى اليسار إلى أسفل اليمين. ويرمز لها بالحرف D أي أن: إذا كانت لدينا المصفوفة الآتية:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ \vdots \quad \vdots \\ a_{n1} \cdots a_{nn} \end{bmatrix} = (a_{ij})_{n \times n}$$

تكون هذه المصفوفة قطرية إذا وإذا فقط: $i \neq j$ for $a = 0$

لواحد على الأقل من (i = j) $a \neq 0$.

ولهذا يرمز للمصفوفة القطرية أحيانا بالآتي:

$$D = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ & \ddots \\ 0 & a_n \end{bmatrix} \qquad (3\text{-}10)$$

## أمثلة

المصفوفات التالية هي مصفوفات قطرية:

مثال(1):

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

مثال(2):

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

مثال(3):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

مثال(4):

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

### 3-7-2 **المصفوفة المحايدة Identity Matrix**

وهي مصفوفة عناصرها القطرية واحد موجب ويرمز لها بالحرف (I) ولتوضيح ذلك إذا كانت:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1} \cdots a_{nn} \end{bmatrix}$$

فإن هذه المصفوفة محايدة إذا وإذا فقط كانت:

$$a_{ij} = 0 \;\; for \;\; i \neq j$$

$$a_{ij} = 1 \;\; for \;\; i = j$$

ويرمز للمصفوفة المحايدة **n ×n** بالرموز $I_n$

**أمثلة**

مثال(1):

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مثال(2):

$$I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وهما مصفوفتان محايدتان × 4 ,2 ×4 2 على التوالي.

ملاحظة

عند ضرب أية مصفوفة مقدما أو لاحقا بمصفوفة أحادية مناسبة فإن النتيجة لا تتغير وبالرموز:

$$A_{m\times n}=I_m A_{m\times n}=A_{m\times n} I_n=A_{m\times n} \qquad (3\text{-}11)$$

مثال:

$$\begin{bmatrix}3 & -1\\1 & 4\\0 & 1\end{bmatrix}_{3\times2}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}_{2\times2}=\begin{bmatrix}3 & -1\\1 & 4\\0 & 1\end{bmatrix}_{3\times2}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}_{3\times3}\begin{bmatrix}3 & -1\\1 & 4\\0 & 1\end{bmatrix}_{3\times2}=\begin{bmatrix}3 & -1\\1 & 4\\0 & 1\end{bmatrix}_{3\times2}$$

### 3-7-3 المصفوفة الصفرية Null Matrix

تسمى المصفوفة n×m التي جميع عناصرها أصفارا بالمصفوفة الصفرية ويرمز لهذه المصفوفة بالرمز (o).

**أمثلة**

مثال(1):

$$\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$$ مصفوفة صفرية 3×2

مثال(2):

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ مصفوفة صفرية $3\times3$

مثال(3):

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ مصفوفة صفرية $2\times4$

قاعدة:

1- إذا جمعت أو طرحت مصفوفة صفرية مناسبة من مصفوفة أخرى فإن هذه المصفوفة لا تتغير ، وبالرموز كالآتي:

2- $$A_{m\times n} \pm O_{m\times n} = A_{m\times n} \qquad (3\text{-}12)$$

3- إذا ضربت مصفوفة بمصفوفة صفرية مناسبة سواء كان الضرب مقدما أو لاحقا فإن النتيجة هي مصفوفة صفرية أخرى ، وبالرموز كالآتي:

$$O_{k\times m} A_{m\times n} = O_{k\times n} \qquad (3\text{-}13)$$

لنأخذ بعض الأمثلة:

مثال(1):

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

مثال(2):

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

مثال(3):

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

### 3-7-4 منقول المصفوفة The Transpose of Matrix

يقصد بمنقول المصفوفة تغيير موقعها فمنقول المصفوفة $A_{m\times n}$ هو $A_{n\times m}$ ويرمز لـه عادة $A'$ فإذا كانت لدينا المصفوفة الآتية:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1} \cdots a_{mn} \end{bmatrix} = (a_{ij})_{m\times n}$$

فإن منقولها هو:

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1} \cdots a_{m\times n} \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} a_{11} \cdots a_{1m} \\ \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1} \cdots a_{n\times m} \end{bmatrix}$$

$$= \left(a_{ij}\right)'_{m\times n} = \left(a_{ij}\right)_{n\times m} \qquad (3\text{-}14)$$

**لنلاحظ ما يلي:**

- إن منقول متجه أفقي ذو بعد - **n** هو متجه عمودي ذو بعد - **n** أيضا والعكس صحيح.
- أما منقول المصفوفة القطرية فهو نفسها تماماً.

**خذ الأمثلة آلاتية:**

مثال(1):

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}'_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & 7 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

مثال(2):

$$\begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}'_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

مثال(3):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}'_{1\times 4} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}_{4\times 1}$$

مثال(4):

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}'_{3\times 1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}_{1\times 3}$$

مثال(5):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}'_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

### 3-7-5 المصفوفة المتماثلة **Symmetric Matrix**

تسمى المصفوفة المربعة المساوية لمنقولها بالمصفوفة المتماثلة أي أن عناصرها متوزعة حول قطرها الرئيسي بشكل منتظم ، وبالرموز:

$$A = A' \qquad (3\text{-}15)$$

لتوضيح ذلك نأخذ المثالين الآتيين:

مثال(1):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & -3 & 4 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & -3 & 4 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

مثال(2):

$$\begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$$

### 3-7-6 المصفوفة المثيلة **Idempotent Matrix**

إذا نتج عن حاصل ضرب مصفوفة متماثلة بنفسها المصفوفة نفسها أيضاً تسمى هذه بالمصفوفة المثيلة.

وبالرموز: تكون المصفوفة **A** مثيلة إذا وإذا فقط كانت:

$$\begin{aligned} A' &= A \\ AA &= A \end{aligned} \qquad (3\text{-}16)$$

خذ المثال الآتي:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

و

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

### 3-7-7 منقول مجموع أو الفرق بين المصفوفات

**Transpose of a Sum or Difference of Matrices**

إن منقول مجموع أو الفرق بين مصفوفتين أو أكثر يساوي مجموع أو الفرق بين منقول هاتين المصفوفتين أو أكثر وبالرموز تتوضح هذه العلاقة كالآتي:

$$(A_{m\times n} \pm B_{m\times n} \pm C_{m\times n})' = A'_{m\times n} \pm B'_{m\times n} \pm C'_{m\times n} \quad (3\text{-}17)$$

وللاختصار:

$$(d_{ij})'_{m\times n} = (d_{ji})_{n\times m}$$

حيث أن:

$$d_{ij} = (A_{ij} \pm B_{ij} \pm C_{ij})'$$

$$d_{ji} = A_{ji} \pm B_{ji} \pm C_{ji}$$

<u>مثال:</u>

إذا كانت:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

فإن:

$$A + B + C = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$$

و $$(A + B + C)' = \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ -1 & 9 \end{bmatrix}$$

وبالمقابل فإن:

$$A' + B' + C' = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ -1 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\therefore (A+B+C)' = A' + B' + C'$$

3-7-8 منقول حاصل ضرب المصفوفات

**Transpose of a Product of Matrices**

إن منقول حاصل ضرب مصفوفتين أو أكثر يساوي حاصل ضرب منقول هذه المصفوفات ولكن بترتيب معكوس. وبالرموز يمكن توضيح ذلك بالآتي:

$$\therefore (A_{m\times n} B_{n\times k} C_{k\times p})' = C'_{p\times k} B'_{k\times n} A'_{n\times m} \qquad (3\text{-}18)$$

<u>مثال:</u>

إذا كانت لدينا المصفوفات التالية:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 2}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}_{2\times 2}, C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{2\times 1}$$

فإن:

$$ABC = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

وإن

$$(ABC)' = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

وبالمقابل فإن:

$$(ABC)' = C'B'A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}_{1\times2} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}_{2\times2} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times3}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

وهي النتيجة نفسها.

### 3-7-9 المصفوفة المجزأة Partitioned Matrix

كثيرة ما تجزأ المصفوفة بواسطة خطوط أفقية وعمودية إلى مصفوفات فرعية.

فالمصفوفة $A_{m\times n}$ يمكن تجزئتها على سبيل المثال إلى:

$$A = \left(A_1 \middle| A_2\right) \qquad (3\text{-}19)$$

حيث أن:

$A_1$ ذات نظام $n_1 \times m$

$A_2$ ذات نظام $n_2 \times m$

وإن $n_1 + n_2 = n$

أما منقول المصفوفة فيمكن وضعه بشكل منقول المصفوفات الفرعية كالآتي:

$$A' = \left(\frac{A_1'}{A_2'}\right) \qquad (3\text{-}20)$$

<u>ملاحظة:</u>

إن الخط الفاصل بين $A_1', A_2'$ هو ليس خط القسمة (الكسري ) بل خط التجزئة.

<u>مثال:</u>

إذا كان لدينا المصفوفة التالية:

$$A=\begin{bmatrix}5 & 1 & 4 & -2\\ 3 & 7 & 1 & 4\\ 1 & 5 & 1 & -7\\ 8 & 1 & 3 & 9\end{bmatrix}_{4\times 4}$$

وقد جزأت كالآتي:

$$A=(A_1|A_2)=\left[\begin{array}{ccc|c}5 & 1 & 4 & -2\\ 3 & 7 & 1 & 4\\ 1 & 5 & 1 & -7\\ 8 & 1 & 3 & 9\end{array}\right]$$

وبذلك يكون منقول المصفوفة **A** هو منقول المصفوفات الفرعية، وكما يلي:

$$A'=\left(\frac{A'_1}{A'_2}\right)=\left[\begin{array}{cccc}5 & 3 & 1 & 8\\ 1 & 7 & 5 & 1\\ 4 & 1 & 1 & 3\\ \hline -2 & 4 & -7 & 9\end{array}\right]$$

<u>قاعدة:</u>

إذا كانـت هنـاك تجزئـة

متماثلة لمصفوفتين أو أكثر فإنه يمكن أجراء عمليات الجمع أو الطرح للمصـفوفات المجـزأة دفعـة واحـدة لنحصل على نفس النتائج وبالرموز يمكن توضيح ذلك كما يلي:

إذا كانت لدينا:

$$A_{m\times n}=(A_{m\times n_1}|A_{m\times n_2})$$

و:

$$B_{m\times n}=(B_{m\times n_1}|B_{m\times n_2})$$

فإن: $(A_{m\times n} \pm B_{m\times n}) = (A_{m\times n_1} \pm B_{m\times n_1} \mid A_{m\times n_2} \pm B_{m\times n_2})$

وبالمثل إذا كان لدينا : $A_{m\times n} = \left(\dfrac{A_{m_1\times n}}{A_{m_2\times n}}\right)$

فإن: $B_{m\times n} = \left(\dfrac{B_{m_1\times n}}{B_{m_2\times n}}\right)$

$$A_{m\times n} \pm B_{m\times n} = \frac{A_{m_1\times n} \pm B_{m_1\times n}}{A_{m_2\times n} \pm B_{m_2\times n}}$$

<u>مثال:</u>

إذا كانت لدينا:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & -1 \end{bmatrix} , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 9 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

فإن:

$$A + B = (A_1 \mid A_2) + (B_1 \mid B_2)$$

$$= \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 7 & 9 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 12 & 11 \\ 2 & 2 & 1 \\ 7 & 10 & 0 \end{array}\right]$$

$$= (A_1 + B_1 \mid A_2 + B_2)$$

وإن: $A + B = \left(\dfrac{A_1}{A_2}\right) + \left(\dfrac{B_1}{B_2}\right)$

$$=\left[\begin{array}{ccc}2 & 5 & 2\\ \hline 1 & 3 & 1\\ 4 & 4 & 1\end{array}\right]+\left[\begin{array}{ccc}1 & 7 & 9\\ \hline 1 & -1 & 0\\ 3 & 6 & 1\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc}3 & 12 & 11\\ \hline 2 & 2 & 1\\ 7 & 10 & 0\end{array}\right]$$

$$=\left(\frac{A_1+B_1}{A_2+B_2}\right)$$

ويمكن أجراء أية تجزئة ( تقطيعات ) مناسبة للحصول على نفس النتائج لعملية الجمع أو الطرح.

قاعدة:

يمكن تجزئة المصفوفات تجزئة مناسبة لأجراء عملية الضرب ويمكن بيان ذلك بالرموز كالآتي:

إذا كانت لدينا المصفوفة $A_{m\times n}$ وجزئت: $A=(A_1|A_2)$ وإن $A_1$ ذات نظام $m\times n_1$ و $A_2$ ذات نظام $m\times n_2$.

و $n_1+n_2=n$ ولدينا أيضا المصفوفة $B_{n\times k}$ وجزئت: $B=\left(\frac{B_1}{B_2}\right)$

وإن $B_1$ ذات نظام $n_1\times k$ و B2 ذات نظام $n_2\times k$.

فإن:

$$AB=(A_1|A_2)\left(\frac{B_1}{B_2}\right)=A_1B_1+A_2B_2 \qquad (3\text{-}21)$$

مثال:

إذا كانت لدينا المصفوفتان التاليتان:

$$A=\left[\begin{array}{cc|cc}2 & 5 & 7 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -1 & 0\end{array}\right],\quad B=\left[\begin{array}{cc}5 & 1\\ 0 & 2\\ \hline -1 & 0\\ 0 & 3\end{array}\right]$$

فإن:

$$AB=\left[\begin{array}{cc|cc}2&5&7&0\\0&3&0&1\\1&0&-1&0\end{array}\right]\left[\begin{array}{cc}5&1\\0&2\\\hline -1&0\\0&3\end{array}\right]$$

$$=\begin{bmatrix}2&5\\0&3\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&1\\0&2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}7&0\\0&1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0\\3&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}10&12\\0&7\\5&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-7&0\\0&3\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&12\\0&10\\6&1\end{bmatrix}$$

## 3-8 محدد المصفوفة The Determinant of Matrix

### 3-8-1 تعريف

إن محدد المصفوفة هو معداد ( عدد ) يستخرج من عناصر المصفوفة المربعة بعمليات معينة وبالرموز يمكن توضيح ذلك بالآتي:

إذا كانت لدينا المصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}$$

فإن:

$$\det\ A=|A|=a_{11}\ a_{22}-a_{12}\ a_{21} \qquad (3-22)$$

**أمثلة**

مثال(1):

جد محدد المصفوفة الآتية:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 5\\ -1 & 6\end{bmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & 5\\ -1 & 6\end{vmatrix}=(2\times 6)-(5\times -1)=17$$

مثال(2):

جد محدد المصفوفة الآتية:

$$B=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 7 & -4\end{bmatrix}$$

$$|B|=\begin{vmatrix}3 & -2\\ 7 & -4\end{vmatrix}=(3\times -4)-(-2\times 7)=2$$

## 2-8-3 أما محدد المصفوفة ذات نظام 3 ×3 فتستخرج كما يلي:

$$|A|=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

أو:

$$(3-23)\ |A|=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})+a_{12}(a_{23}a_{31}-a_{21}a_{33})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})$$

مثال:

جد محدد المصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 8\\ 9 & 7 & 0\\ 6 & 4 & 2\end{bmatrix}$$

الجواب:

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 3 & 8\\ 9 & 7 & 0\\ 6 & 4 & 2\end{vmatrix}$$

$$= 1\times7\times2 + 3\times0\times6 + 8\times9\times4 - 1\times0\times4 - 8\times7\times6 - 3\times9\times2$$

$$= 14 + 0 + 288 - 0 - 336 - 54$$

$$= -88$$

### 3-8-3 استخراج محدد المصفوفة بطريقة فك المحدد بالمرافقات

**Expansion by Cofactors**

يمكن استخراج محدد المصفوفات ذات نظام أكثر من $3\times3$

فيجري بالطريقة المعروفة بفك المحدد بطريقة المرافقات وذلك بإعادة كتابة محدد المصفوفة (2-23) كما يأتي:

$$|A| = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

**ويلاحظ هنا:**

إن المحددات الصغيرة أعلاه ما هي إلا محددات مصفوفات فرعية للمصفوفة **A** استخرجت بطريقة حذف صف أو عمود معين من **A**، إن هذه المحددات الصغيرة يطلق عليها محيد ( **minors** ) وفي ضوء هذا الأسلوب يمكن تثبيت القاعدة التالية:

إذا كانت لدينا ( **Mij** ) مصفوفة ذات $(n-1)\times(n-1)$ استخرجت عن طريق حذف الصف ( i ) والعمود ( j ) من المصفوفة ( $A_{nxn}$ ) فإن محدد المصفوفة $|M|$ هو محيد المصفوفة **A** ، أما المعداد الذي يسبق كل محيد فيمكن استخراجه من المصفوفة كالآتي:

$$Cij = (-)^{i+j}|Mij| \qquad (3\text{-}24)$$

ويسمى $Cij$ بالمرافق ( cofactor ) أو المحيدد ذو الإشارة للعنصر $aij$ للمصفوفة A.

أما المصفوفة $n \times n$ : $(Cij)'$ فتعرف بالمجاور ( adjoint ) للمصفوفة A ويرمز له: $adj\ A$

وبذلك نستطيع استخراج محدد أية مصفوفة بصيغة فك المحدد بطريقة المرافقات فمحدد المصفوفة A يمكن تحليله بالصفوف على الوجه التالي:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ C_{ij} \quad \text{لكل صف} \quad i = 1,2,3,\ldots,n \qquad (3\text{-}25)$$

وبالأعمدة بالشكل التالي:

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\ C_{ij} \quad \text{لكل عمود} \quad j = 1,2,3,\ldots,n \qquad (3\text{-}26)$$

فإذا أخذنا محدد المصفوفة $3 \times 3$ فإن:

$$|A| = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

فإنه يمكن كتابته بالشكل التالي:

$$|A| = a_{11}\,c_{11} + a_{12}\,c_{12} + a_{13}\,c_{13} = \sum_{j=1}^{3} aij\ Cij$$

<u>مثال:</u>

اوجد محدد المصفوفة التالية:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

حسب الطريقة الأولى: المذكورة في ( 23 - 3 ):

$$|A| = 2(0\times 2 - 2\times 3) + 5(2\times 0 - 1\times 2) + 4(1\times 3 - 0\times 0)$$
$$= -12 - 10 + 12$$
$$= -10$$

أما إذا تم التحليل عن طريق الصف الأول كما في (3-25) فإن:

$$|A| = 2\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$$
$$= 2(-6) - 5(2) + 4(3)$$
$$= -12 - 10 + 12$$
$$= -10$$

وإذا تم التحليل عن طريق العمود الثالث كما في (3-26) فإن:

$$|A| = 4\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= 4(3) - 2(6) + 2(-5)$$
$$= 12 - 12 - 10$$
$$= -10$$

**وهي نفس النتيجة.**

**ملاحظة:**

إن المرافقات ( cofactors ) أو حسب ما سميناها المحيددات يمكن أن تحلل إلى محيددات اصغر ذات درجة ثانية وثالثة أو أكثر وذلك لتسهيل مهمة احتسابها.

### 3-8-4 خصائص المحددات Properties of Determinants

من الخصائص المهمة للمحددات ما يلي:

1- إذا بودلت الصفوف والأعمدة المتناظرة في محدد فإن قيمة المحدد لا تتغير وذلك لأن:

$$A = |A'|$$

2- إذا كانت قيمة عناصر أي صف ( أو عمود ) في محدد صفرا فإن قيمة المحدد تكون صفرا.

3- إذا ضرب كل عنصر في صف ( أو عمود ) من محدد برقم ثابت فإن قيمة المحدد تضرب بالرقم نفسه.

4- إذا بودل صفان ( أو عمودان ) في محدد احدهما بالآخر فإن إشارة المحدد تتغير ، ولكن قيمته المطلقة لا تتغير.

5- إذا تساوى صفان ( أو عمودان ) في محدد فإن قيمة المحدد تكون صفراً.

6- إذا جمع كل عنصر من عناصر صف ( أو عمود ) في محدد أو طرح من عنصر متناظر من صف آخر ( أو عمود ) فإن قيمة المحدد لا تتغير.

7- إن محدد حاصل ضرب مصفوفتين يساوي حاصل ضرب محددي هاتين المصفوفتين أي أن:

$$|AB| = |A|\ |B| \qquad (3\text{-}27)$$

8- إن محدد المصفوفة القطرية يساوي حاصل ضرب عناصرها القطرية.

## 3-9 معكوس المصفوفة The Inverse of Matrix

### 3-9-1 تعريف

عند إجراء عملية القسمة في مبادئ الجبر للمتغير x على المتغير y فإن النتيجة تساوي حاصل ضرب x في مقلوب المقسوم عليه y وكما يلي:

$$\frac{x}{y} = x\frac{1}{y}$$

وفي المصفوفات: إذا كانت لدينا المصفوفة مربعة مثل A ووجدت أيضاً مصفوفة مربعة مثل B وكانت:

$$AB = BA = I \qquad (3\text{-}28)$$

فإن B تسمى معكوس المصفوفة A وتكتب كالآتي:

$B = A^{-1}$ ( ونتذكر أن I هي مصفوفة محايدة )

ولهذا فإن إيجاد معكوس ( مقلوب ) المصفوفة وهو عملية مشابهة لعملية القسمة في الجبر.

وعلى الرغم من أن أي عدد ( غير الصفر ) له مقلوبة إلا أننا نجد مصفوفات مربعة ( غير المصفوفة الصفرية ) ليس لها معكوس.

إن المصفوفة التي لها معكوس تسمى مصفوفة اعتيادية (غير شاذة ) (**nonsingular** ).أما المصفوفة التي لا معكوس لها فتسمى مصفوفة شاذة ( **singular** ) ويمكن اختبار فيما إذا كانت المصفوفة شاذة أو غير شاذة عن طريق استخراج محددها وملاحظة قيمة هذا المحدد وفي ضوءه نقرر:

أ ) المصفوفة A غير شاذة إذا كانت: $|A| \neq 0$.

ب) والمصفوفة B شاذة إذا كانت : $|B| = 0$.

### 3-9-2 معكوس مصفوفة Inverse of 2×2 Matrix

إذا كانت لدينا المصفوفة التالية:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

فإن معكوس A هو $A^{-1}$ وإذا رمزنا لهذا المعكوس بالحرف B فإن:

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

ولدينا:

$$AA^{-1} = I \text{ أو } AB = I \qquad (3\text{-}29)$$

لذلك:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

أي أن:

$$\begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

و

$$a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} = 1$$

$$a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} = 0$$

$$a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} = 1$$

$$a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} = 0$$

وبحل هذه المعادلات الأربعة لاستخراج قيمة $bij$ نحصل على:

$$b_{11} = \frac{a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

$$b_{12} = \frac{-a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

$$b_{21} = \frac{-a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

$$b_{22} = \frac{a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

ويلاحظ أن مقام المقادير أعلاه ما هو إلا محدد المصفوفة A حيث أن:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \quad a_{22} - a_{12} \quad a_{21}$$

وإذا كان $\det A = 0$ فلا يمكن إيجاد قيم $bij$ وبالتالي لا يمكن إيجاد قيمة $A^{-1}$.

<u>مثال(1):</u>

جد معكوس المصفوفة التالية:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

إن محدد هذه المصفوفة هو:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 15 \neq 0$$

إذن للمصفوفة المذكورة معكوس هو:

$$b_{11} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

$$b_{12} = \frac{-2}{15} = -\frac{2}{15}$$

$$b_{21} = \frac{0}{15} = 0$$

$$b_{22} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

لذلك فإن:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{15} \\ 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

ولاختبار صحة الحل يجب أن يكون:

$$AA^{-1} = I$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{15} \\ 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

إذن الحل صحيح.



مثال(2):

جد معكوس المصفوفة التالية:

$$\begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

لما كان: $\begin{vmatrix} 4 & 10 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 20 - 20 = 0$

إذن هذه المصفوفة شاذة ولا معكوس لها.

### 3-9-3 معكوس المصفوفات الكبيرة Inverse of Large Matrices

إن إيجاد قيمة معكوس مصفوفة اكبر من $2 \times 2$ بأتباع الطريقة أعلاه ممل وطويل، ولهذا طورت طرق أخرى لحساب معكوس المصفوفة نتناول منها الطريقتين الأكثر شيوعا

واللتان يمكن استخدامهما مع المصفوفات مهما كانت سعتها والتي تحتوي عناصرها على أعداد ذات عدة أرقام.

## أ- طريقة استخدام عمليات الصف أو العمود لإيجاد معكوس المصفوفة

**The Row or Column Operations Method**

عند حل المعادلات الآنية تستخدم عملية بسيطة لقلب نظام المعادلات الأصلي إلى نظام مكافئ له يساعدنا في إيجاد الحل بسهولة ، إن النظام المكافئ يستخرج إذا:

1- كانت المعادلتان متبادلتان ( interchange ).

2- إمكانية ضرب المعادلة بأي عدد ثابت غير الصفر مثل ( k ).

3- إمكانية إحلال [ ( المعادلة i ) + ( المعادلة k( j ] محل المعادلة i.

وبالاعتماد على هذا الأسلوب تحدد مبادئ عمليات الصف (row operations) في استخراج معكوس المصفوفة وهي كالآتي:

1- إمكانية تبادل صفين ( row )

2- إمكانية ضرب الصف بأي عدد ثابت غير الصفر(scalar ) مثل k.

3- إحلال [ (الصف i ) + ( الصف k ( j ] محل الصف i.

ونفس الأسلوب ينطبق على عمليات العمود (column operations)

<u>مبرهنة:</u>

إذا عكست المصفوفة A إلى مصفوفة محايدة ( I ) عن طريق سلسلة من عمليات الصف أو العمود فإن نفس هذه العمليات إذا أجريت على المصفوفة المحايدة ( I ) ستؤدي إلى قلبها إلى $A^{-1}$.

إن هذه القاعدة تشكل الأساس الثابت في عكس المصفوفة غير الشاذة إلى مصفوفة محايدة (I).

إن الطريقة التي تستند على القاعدة أعلاه هي أكثر الطرق شيوعا ويمكن استخدامها مع أية مصفوفة كما إنها مبرمجة على الحاسوب مما يسهل استخدامها لهذا الغرض.

*** خطوات قلب مصفوفة مربعة إلى مصفوفة محايدة:**

إذا كانت لدينا المصفوفة $An \times n$ فنتبع الخطوات التالية لاستخراج معكوسها:

1- قسمة الصف الأول للمصفوفة على العنصر الأول فيه ، والاستعانة بهذا العنصر بتحويل بقية عناصر العمود الأول إلى أصفار.

2- قسمة الصف الثاني على العنصر الثاني فيه ، والاستعانة بهذا العنصر لتحويل بقية عناصر العمود الثاني إلى أصفار.

3- قسمة الصف ( n ) على العنصر ( n ) فيه ، والاستعانة بهذا العنصر لتحويل بقية عناصر العمود ( n ) إلى أصفار.

من المعتاد عند استخراج معكوس المصفوفة A استخدام الجدول التالي:

$$\left[A|B\right]$$

وبأتباع العمليات أعلاه نحصل على المعكوس في نفس الجدول ولكن بالصيغة التالية:

$$\left[I|B\right]$$

حيث أن: $B = A^{-1}$

<u>ملاحظة:</u>

إذا لم يكن للمصفوفة معكوس ( لكونها شاذة ) فلا فائدة من مباشرة هذه العمليات ولكن لو بوشر بها على سبيل الافتراض فإنها ستتوقف عند نقطة معينة مشيرة إلى عدم وجود معكوس للمصفوفة.

## أمثلة

مثال(1):

استخرج معكوس المصفوفة الآتية:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

لإيجاد معكوس المصفوفة أعلاه نرفق معها مصفوفة محايدة مناسبة كما يأتي:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

ثم نتبع الخطوات الآتية:

الخطوة الأولى:

نقسم الصف الأول $\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$ على العنصر $a_{11}$ فيتحول هذا العنصر إلى العدد ( 1 )

ونحصل على:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$ ( الصف الأول ÷ 2 )

ثم نستخدم العنصر ( $a_{11} = 1$ ) لتحويل بقية عناصر العمود الأول إلى أصفار

(هنا لدينا عنصر واحد فقط وذلك لوجود صف واحد آخر فقط ) هو:

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ولتحويل الرقم ( 5 ) إلى صفر بالمقارنة مع العنصر ( $a_{11} = 1$ ) نضرب الصف الأول في ( 5 )

ونطرح الناتج من عناصر الصف الثاني وكما يلي:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 1 \end{array}\right]$$ ( الصف الثاني - الأول × 5 )

إذن أصبح العنصر $a_{21}$ من المصفوفة يساوي صفرا.

<u>الخطوة الثانية:</u>

نقسم الصف الثاني على العنصر $a_{22}$ كي نحول هذا العنصر إلى العدد ( 1 ) أي نقسم الصف الثاني $\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 1 \end{array}\right]$ على العنصر الثاني فيه وهو ( $\frac{1}{2}$ ) لنحصل على:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{array}\right]$$ ( الصف الثاني ÷ $\frac{1}{2}$ )

ثم نستخدم العنصر ($a_{22} = 1$) لتحويل بقية عناصر العمود الثاني إلى أصفار وهنا لدينا عنصر واحد فقط في الصف الأول ولا غيره وهو:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right]$$

ولتحويل الرقم ( $\frac{1}{2}$ ) إلى صفر نقسم الصف الثاني على ( 2 ) ثم نطرح الناتج من الصف الأول لنحصل على:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{array}\right]$$

والآن انتهى الحل وتحولت المصفوفة A إلى I وتكونت المصفوفة المعاكسة B.

$$\therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

ولاختبار صحة الحل لابد من: $AB = I$ لنحاول:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

∴ الحل صحيح.

مثال(2):

ما هو معكوس المصفوفة التالية:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

الحل:

نرفق مع المصفوفة مصفوفة محايدة مناسبة لها:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

ثم نقوم بالخطوات الآتية:

**الخطوة الأولى:**

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 10 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

بقسمة الصف الأول على (-1)

دون تغيير في الصف لأن $a_{21}$ هو (0)

ملاحظة:

أن أول مرحلة في كل خطوة هي التي وضع تحتها خط ( والتي نهدف إلى تحويل العناصر) التي تشكل قطر المصفوفة إلى ( 1 ) ثم تبدأ المراحل الأخرى بجعل العناصر فوق أو تحت العنصر ( 1 ) أصفارا.

**الخطوة الثانية:**

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 4 & -9 & 1 \end{array}\right]$$

الصف الأول + الصف الثاني × 2

دون تغيير لأن العنصر $a_{22}$ هو (1)

**الخطوة الثالثة:**

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{-7}{10} & \frac{3}{10} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{9}{10} & \frac{1}{10} \end{array}\right]$$

الصف الأول +الصف الثالث × 3

دون تغيير لأن العنصر $a_{23}$ هو (0)

$$\therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{-7}{10} & \frac{3}{10} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{5} & -\frac{9}{10} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$$

ولاختبار صحة الحل لابد من: $AA^{-1} = I$ .

∴ الحل صحيح .

مثال (3):

اوجد معكوس المصفوفة التالية:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 4 & 5 \\ -4 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

الجواب:

نضع التمرين الآن في جدول التسهيل ونبسط العمليات وكما يلي:

| | | |
|---|---|---|
| | $\begin{matrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 4 & 5 \\ -4 & 2 & 6 \end{matrix}$ | $\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$ |
| الخطوة الأولى | $\begin{matrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 10 & 2 \\ 0 & 10 & 2 \end{matrix}$ | $\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{matrix}$ |
| الخطوة الثانية | $\begin{matrix} 1 & 0 & -\frac{7}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$ | $\begin{matrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{10} & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{matrix}$ |

لقد توقفت عمليات الحل حيث يلاحظ وعند الخطوة الثانية عدم إمكانية الاستمرار فيها لان قيمة $a_{33}$ أصبحت صفرا وهذا سوف لا يؤدي إلى تحويل A إلى I وهذا واضح بتعذر تحويل $a_{33}$ إلى ( 1 ) بإتباع الخطوات التي وردت بطريقة عمليات الصف.

**إذن دعنا نثبت الملاحظات الآتية:**

1- لقد احتوت المصفوفة اليسرى من الجدول أعلاه عند الخطوة الأولى تحتوي على صفين متطابقين وهما الصف الثاني والثالث: ( **2 , 10 , 0** ) ومن ذلك نستدل أن المصفوفة لا معكوس لها.

2- إذا تطابق صفان في مصفوفة تمثل معاملات مجموعة من المعادلات الخطية الآنية ، فإن هذه المجموعة من المعادلات ليس لها حل وحيد (**unique solution**) وإذا كانت المعادلات متطابقة فهناك ما لانهاية لها من الحلول ، أما إذا كانت للمعادلة حدود ثابتة مختلفة فلا حلول لها.

وسنأتي على شرح ذلك في فقرة لاحقة.

## ب- إيجاد معكوس المصفوفة باستخدام طريقة المجاورات والمحددات

إن الطريقة الثانية لاستخراج المعكوس هي الطريقة التي تستخدم المجاورات والمحددات والتي تتلخص بالقاعدة التالية:

قاعدة:-

إذا كانت المصفوفة A ( غير شاذة ) أي أن:

فإن: $|A| \neq 0$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj\, A \qquad (3\text{-}30)$$

أمثلة

مثال(1):

اوجد معكوس المصفوفة التالية:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

لقد بدأنا بالمصفوفة $2 \times 2$ وهي نفسها في المثال السابق لتبسيط شرح القاعدة أعلاه:

الجواب:

$|A| = 6 - 5 = 1$ إذن المصفوفة غير شاذة.

أما $adj\, A$ فيستخرج حسب الصيغة $adj\, A = (C_{ij})'$

وإن $i, j = 1,2,3,.....n$ $\qquad Cij = (-1)^{i+j} |Mij|$

ونتذكر بأن: $|M_{ij}|$ هو محيدد المصفوفة A وعليه فإن:

الجزء الأول

$$C_{11} = (-1)^{1+1}|3| = 3$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2}|5| = -5$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1}|1| = -1$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2}|2| = 2$$

**ملاحظة:**

**كان محيدد المصفوفة $A$ هو العنصر $a_{ij}$ نفسه لان المصفوفة هي: $2\times2$ فقط والآن أصبح لدينا:**

$$Cij = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \ adj\ A = (Cij)' = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \ A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

وعند التدقيق في معكوس المصفوفة أعلاه يمكن التوصل إلى النتيجة الآتية:

نتيجة:

لاستخراج معكوس مصفوفة $2\times2$ تتبع الخطوات الآتية:

1- نجد قيمة محدد المصفوفة ونضعه في الصيغة $\frac{1}{|A|}$.

2- يستبدل العنصرين $a_{11}, a_{22}$ كل محل الآخر.

3- ثم نستبدل إشارة العنصرين $a_{21}$ ، $a_{12}$.

4- نضرب المصفوفة الجديدة بعد إجراء هذه التغيرات ب $\frac{1}{|A|}$ لنحصل على $A^{-1}$.

مثال(2):

في المثال السابق وحسب القاعدة أعلاه يكون معكوس المصفوفة المذكورة كما يلي:

الجواب:

المصفوفة هي:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 5 & 3\end{bmatrix}$$

أما خطوات الحل حسب النتيجة أعلاه هي:

1- محدد المصفوفة هو: $(2\times3)-(5\times1)$ ويساوي ( 1 ).

2- نستبدل ( 3 ) ، ( 2 ) كل محل الآخر.

3- نستبدل إشارة كل من ( 5 ) و ( 1 ).

4- نضرب المصفوفة الجديدة بـ $\frac{1}{|A|}$.

فنحصل على:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 5 & 3\end{bmatrix} \; , \; A^{-1}=\begin{bmatrix}3 & -1\\ -5 & 2\end{bmatrix}$$

وهي نفس النتيجة التي حصلنا عليها.

مثال(3):

جد معكوس المصفوفة الآتية:

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ -7 & 4\end{bmatrix}$$

<u>الجواب:</u>

حسب طريقة المجاورات والمحددات:

$$|A| = -8 + 7 = -1$$

$$C_{11} = (-1)^{1+1}|4| = 4$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2}|-7| = 7$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1}|1| = -1$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2}|-2| = -2$$

$$Cij = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$adj\ A = (Cij)'$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 7 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ A^{-1} = \frac{1}{|A|}\ adj\ A = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 7 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$$

أما الطريقة المختصرة التي تستند على النتيجة فهي:

بعد استبدال $a_{11}$ ,$a_{22}$ احدهما محل الآخر وتغير إشارة كل من $a_{12}$ ,$a_{21}$ وضرب المصفوفة بـ $\frac{1}{|A|}$ نحصل على:

$$\therefore\ A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 7 & -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 7 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$$

وهي نفس النتيجة.

مثال(4):

أوجد معكوس المصفوفة التالية (وهو مثال سابق ).

الجواب:

نجد أولاً قيمة $|A|$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$|A| = -1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -(-2) - 2(0) + (-4)$$

-10

ثم نجد قيم $C_{ij}$ وكالاتي:

$$C_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = (1)(-2) = -2$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = (-1)(0) = 0$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = (1)(-4) = -4$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = (-1)(-7) = 7$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = (1)(-10) = -10$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(-9) = 9$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (1)(-3) = -3$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(0) = 0$$

وبذلك نحصل على:

$$C_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (1)(-1) = -1$$

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 7 & -10 & 9 \\ -3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$adjA = (C_{ij})' = \begin{bmatrix} -2 & 7 & -3 \\ 0 & -10 & 0 \\ -4 & 9 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{|A|}adj$$

$$= \frac{1}{-10}\begin{bmatrix} -2 & 7 & -3 \\ 0 & -10 & 0 \\ -4 & 9 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{7}{10} & \frac{3}{10} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{5} & -\frac{9}{10} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$$

هو نفس الحل السابق المذكور في المثال (2) حسب طريقة الصف أو العمود.

<u>مثال(5):</u> أوجد معكوس المصفوفة التالية:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

نجد أولا:

$$|A| = 1\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1(7) - 2(1) - 1(5)$$

$$=0$$

**لهذا فإن المصفوفة A هي شاذة وليس لها معكوس.**

<u>ملاحظة:</u>

1- إن استخراج معكوس المصفوفة بعمليات سواء بعمليات الصف أو عمليات العمود هو اقل جهدا إذا كانت عناصر المصفوفة ذات أعداد صغيرة ولكن إذا كانت المصفوفة ذات أعداد كبيرة أو كسرية فيفضل استخراجها بطريقة المجاور والمحدد. وتعتبر كلا الطريقتين في المصفوفات الكبيرة مجهدة ولهذا يتم اللجوء عادة إلى برمجة ذلك على الحاسوب.

2- من الأجدى فحص كون المصفوفة اعتيادية (ذات معكوس) أو شاذة (ليست ذات معكوس) قبل الشروع بالحل.

### 3-9-4 معكوس المصفوفة المجزأة

قد نحتاج أحياناً معكوس مصفوفة بشكلها المجزأ وكما يأتي:

<u>قاعدة:</u>

إذا كانت لدينا المصفوفة $A$ ذات $n\times n$ وجزئت بالشكل التالي:

$$A = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right]$$

حيث أن:

$A_{11}$ ذات $n_1 x\, n_1$ ، $A_{12}$ ذات $n_1 x\, n_2$

و $A_{21}$ ذات $n_2 x\, n_1$ ، $A_{22}$ ذات $n_2 x\, n_2$

وإن $n_1 + n_2 = n$

فإن:

$$A^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} A_{11}^{-1}(I + A_{12}B^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}B^{-1} \\ \hline -B^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & B^{-1} \end{array}\right]$$

حيث أن:

$$B = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$$

وإن $B$ , $A_{11}$ هي مصفوفات غير شاذة.

<u>مثـال:</u>

أوجد معكوس المصفوفة التالية:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

إذا جزئت المصفوفة كما يلي:

$$\left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 4 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

وبتطبيق القاعدة أعلاه:

فإن: $A_{11}^{-1}(I + A_{12}B^{-1}A_{21}A_{11}^{-1}$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \left( \frac{1}{10} \right) (4 \quad 1) \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{6}{5} & \frac{27}{10} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{6}{5} & \frac{27}{10} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{7}{10} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

حيث أن $B = (-2) - (4 \quad 1) \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$= -2 + 12 = 10$$

و $B^{-1} = \frac{1}{10} \quad , A_{11}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

ثم نجد قيمة:

$$-A_{11}A_{12}B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \left( \frac{1}{10} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \left( \frac{1}{10} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3}{10} \\ 0 \end{bmatrix}$$

ثم نجد قيمة:

$$-B^{-1} A_{21} A_{11}^{-1} = -\left( \frac{1}{10} \right) (4 \quad 1) \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{10} \begin{bmatrix} -4 & 9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{9}{10} \end{bmatrix}$$

ثم نجد قيمة $B^{-1}$ وهي جاهزة:

$$B^{-1} = \left( \frac{1}{10} \right)$$

لذلك فإن:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{7}{10} & \frac{3}{10} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{5} & -\frac{9}{10} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$$

وهو نفس الحل السابق.

### 3-9-5 خصائص عامة لمعكوس المصفوفة

1- إن معكوس معكوس المصفوفة هو المصفوفة الأصلية أي أن:

$$\left( A^{-1} \right)^{-1} = A$$

2- إن محدد معكوس المصفوفة يساوي مقلوب محدد المصفوفة أي أن:

$$\left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|}$$

3- إن معكوس منقول المصفوفة يساوي منقول معكوس المصفوفة ، أي أن:

$$(A')^{-1} = \left(A^{-1}\right)'$$

4- إن معكوس حاصل ضرب مصفوفتين يساوي حاصل ضرب معكوسهما ولكن بترتيب متضاد.

أي أن: $$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

## 3-10 المعادلات الخطية الآنية Simultaneous Linear Equations

إذا كانت لدينا المعادلات الخطية:

$$x + 2y - z = 5$$

$$2x - y + z = 1$$

$$4x + y + 3z = 13$$

فمن الممكن وضع هذه المجموعة من المعادلات في صيغة مصفوفات كالآتي:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 13 \end{bmatrix}$$

حيث يصبح من السهل حل هذه المنظومة من المعادلات.

وقبل الدخول في الطرق المستخدمة في حل مثل هذه المجموعة من المعادلات لابد من تناول بعض المفاهيم الأساسية المتعلقة بذلك:

### 3-10-1 الارتباط الخطي Linear Dependence

إذا كانت لدينا مجموعة عددها m من المتجهات يرمز لها $x_1, x_2, \ldots, x_m$

وكان كل واحد من هذه الموجهات يحتوي على n من العناصر فإن مجموعة المتجهات المذكورة تكون مرتبطة خطياً إذا كان هناك توافق بينها مساوياً لمتجه صفري ذو n من العناصر.

وبعبارة أخرى إذا كانت هناك مجموعة من الأعداد مثل $k_1, k_2, \ldots, k_m$ بشرط إلا تكون جميعها أصفارا وكانت:

$$k_1 x_1 + k_2 x_2 + \ldots\ldots + k_m x_m = \sum_{i=1}^{m} k_i x_i = 0 \qquad (3-31)$$

فإن مجموعة المتجهات $x_1, x_2, \ldots, x_m$ تكون مرتبطة خطياً أما إذا لم تكن هناك مجموعة من الأعداد مثل $k_i$ بشرط ألا تكون جميعها أصفارا وكانت $\sum_{i=1}^{m} k_i x_i \neq 0$ ففي هذه الحالة تكون مجموعة المتجهات غير مرتبطة خطياً.

لنوضح ذلك خذ المثال الآتي:

<u>مثال(1):</u>

إذا كانت لدينا المصفوفة التالية:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 1 \\ 24 & 7 \end{bmatrix}$$

وواضح أن:

$$\sum_{i=1}^{3} k_i x_i = k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 = 0$$

وذلك أذا أخذنا: $K_i = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

فإن:

$$\sum_{i=1}^{3} K_i X_i = 2[3 \quad 2] + 3[6 \quad 1] - 1[24 \quad 7]$$

$$= [6 \quad 4] + [18 \quad 3] - [24 \quad 7]$$

$$= [0 \quad 0]$$

إذن المصفوفة أعلاه مرتبطة خطياً.

ويلاحظ أن المجموعة k هي [1- 3 2]. أما كل زوج من صفوف المصفوفة فهما غير مرتبطين خطياً

وذلك لعدم وجود مجموعة مثل $k_i$ ( ماعدا المجموعة الصفرية ) تحقق $\sum_{i=1}^{m} K_i X_i = 0$ ولنأخذ مثال

آخر:

<u>مثال(2):</u>

إذا كانت هناك مصفوفة مثل:

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 12 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

فإذا اخترنا مجموعة مثل $[-1 \quad 1 \quad -2]$ وطبقاً للصيغة (31 - 3) نحصل على:

$\sum_{i=1}^{3} k_i x_i =$ 1- (الصف الأول) +1( الصف الثاني) -2( الصف الثالث )

$$= (-4 \quad -6) + (8 \quad 12) - (4 \quad -6)$$

$$= (0 \quad 0)$$

إذن هناك المجموعة $k = [-1 \quad 1 \quad -2]$ التي تحقق $\sum_{i=1}^{m} k_i x_i = 0$

يظهر أن الصفوف الثلاثة من المصفوفة أعلاه مرتبطة خطياً. كما أن كل زوج من الصفوف مرتبط خطياً أيضاً مادام:

0 = ( الصف الثاني) - ( الصف الأول) 2

0 = ( الصف الثاني) - ( الصف الثالث)4

0 = ( الصف الأول) - ( الصف الثالث)2

وإذا ما اخترنا الارتباط الخطي على مستوى الأعمدة فيمكن إعادة صياغة العلاقة (3-31) لتكون:

$$\sum_{j=1}^{n} k_j x_j = 0 \qquad (3-32)$$

وعند تدقيق عمودي المصفوفة أعلاه يلاحظ أنهما مرتبطان خطياً أيضاً مادام هناك:

$k_j = (\frac{3}{2}, -1)$ يحقق ما يأتي:

$$\sum_{j=1}^{3} k_j x_j = \frac{3}{2}\begin{bmatrix}4\\8\\2\end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix}6\\12\\3\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}6\\12\\3\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}6\\12\\3\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

والآن إذا أخذنا المصفوفة:

$$\begin{bmatrix}2 & 5\\3 & 1\end{bmatrix}$$

ويلاحظ بأنه لا توجد مجموعة k التي تحقق: $\sum_{i=1}^{m} k_i x_i = 0$ أو $\sum_{j=1}^{n} k_j x_j = 0$ ومن ذلك نستنتج بأن صفي وعمودي المصفوفة أعلاه غير مرتبطة خطياً.

## 3-10-2 رتبة المصفوفة The Rank of the Matrix

يقصد برتبة المصفوفة أعلى عدد من الصفوف غير المرتبطة خطياً في أي مصفوفة. ويرمز لهذا العدد بالرمز (r) وتسمى المصفوفة حينذاك بالمصفوفة ذات الرتبة j. وهذا العدد يساوي أيضا أعلى عدد من الأعمدة غير المرتبطة خطياً في نفس المصفوفة.

إن رتبة المصفوفة $m\times n$ يمكن أن تكون m أو n أيهما اصغر.ويكون لدينا $r \le \min(m,n)$

ومن تعريف المصفوفة غير الشاذة فإن مصفوفة غير شاذة مثل $A_{nn}$يكون فيها n من الصفوف غير المرتبطة خطياً ( أو الأعمدة ) ولهذا فهي مصفوفة من الرتبة n.

وهناك طريقة أخرى لحساب رتبة المصفوفة تتلخص في التفتيش عن اكبر محدد غير صفري من محددات المصفوفات الفرعية المربعة المستخلصة من المصفوفة الرئيسية أعلاه. وعند إيجاد المحدد الأكبر غير الصفري فإن رتبة المصفوفة هي درجة هذا المحدد.

مثال(1):

ما هي رتبة المصفوفة الآتية:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

خذ مصفوفة فرعية وأوجد محددها:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|B| = 2(1) - 2(0) + 1(-2) = 2 - 2 = 0$$

والآن لنأخذ مصفوفة فرعية أخرى ونجد محددها أيضاً:

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|C| = 2(-1) - 1(-3) + 0(1) = 1$$

$$\neq 0$$

إذن رتبة المصفوفة **A** هي مرتبة اكبر مصفوفة فرعية اختبرنا محددها لا يساوي صفراً والذي كان $3\times 3$ إذن رتبة المصفوفة **A = 3**.

<u>مثال(2):</u>

جد رتبة المصفوفة التالية:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

خذ المصفوفة الفرعية التالية وهي اكبر مصفوفة فرعية:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

وإن قيمة المحدد B هي:

$$|B| = 28 - 60 - 44 + 180$$

$$= 104$$

$$\neq 0$$

إذن رتبة المصفوفة A = 4

ونحصل على نفس النتيجة إذا اخترنا عدد الأعمدة غير المرتبطة خطياً نجد أنها = 4 حيث أن العمود الأول والرابع مرتبطة خطياً وذلك لان:

0 = ( العمود الرابع ) - ( العمود الأول ) 2

إذن عدد الأعمدة غير المرتبطة خطياً ( باستبعاد أحد العمودين الأول أو الرابع ) هو 4 ويمثل رتبة المصفوفة A أعلاه.

## 3-10-3 بعض الخواص في تحديد رتبة المصفوفة

1- لما كان محدد المصفوفة القطرية يساوي حاصل ضرب عناصرها القطرية فإن رتبة المصفوفة القطرية I هي عدد العناصر القطرية غير الصفرية فيها r(A) ذلك:

$$r(I_n) = n$$

2- رتبة حاصل ضرب مصفوفتين لا يزيد عن الرتبة الصغرى لهاتين المصفوفتين ذلك:

$$r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$$

3- مادامت المصفوفة الجزئية للمصفوفة $A'$ هي منقول المصفوفة الجزئية لـ A لذلك:

$$|B| = |B'|, r(A') = r(A)$$

4- في المصفوفة المربعة $A_{n\times n}$ تكون $r(A) = n$ إذا وإذا فقط كانت (A) غير شاذة (nonsingular) وتكون $r(A) < n$ إذا كانت (A) شاذة (singular) لذلك فإن صفوف المصفوفة المربعة الشاذة وأعمدتها مرتبطة خطياً وإن صفوف ( وأعمدة ) المصفوفة المربعة غير الشاذة غير مرتبطة خطياً.

ولتوضيح ذلك دعنا نأخذ حل مجموعة معادلات آنية خطية متكونة من n من المعادلات و n من المتغيرات هي $x_1, x_2, ...., x_n$ وتكتب هذه المجموعة كما يلي:

$$AX = B$$

حيث أن B ذات $1\times n$ و A ذات $n\times n$ و x ذات $1\times n$.

وإذا كانت المصفوفة A غير شاذة فإن الحل الوحيد (unique solution) لهذه المسألة هو:

$$X = A^{-1}B$$

وبالعكس إذا كانت المسألة: $AX = B$ لها حل وحيد فإن المصفوفة A هي مصفوفة غير شاذة.

قاعدة:

عند حل المعادلات الآنية عموماً إذا كانت مكونة من m من المعادلات و n من المتغيرات أو n من المعادلات و n من المتغيرات يلاحظ ما يلي:

1- إذا كانت: $r(A|\ B) = r(A)$ فإن كل المعادلات في المجموعة منسجمة منطقياً وإن هناك على الأقل حل واحد.

2- إذا كانت: $r(A|\ B) = r(A) = n$ فإن هناك حل وحيد.

3- إذا كانت: $r(A|\ B) = r(A) < n$ فإن هناك حلول لا حدود لها وإن صفوف (وأعمدة) A معتمدة خطياً.

لنأخذ الأمثلة الآتية:

مثال(1):

إذا كانت لدينا المجموعة التالية من المعادلات الآنية الخطية:

$$x + 3y - z = 12$$

$$2x + 6y - 2z = 7$$

$$2x + y + 2z = 11$$

إن هذه المجموعة يمكن وضعها بصيغة المصفوفات كما يلي:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 6 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix}$$

أما محدد المصفوفة A فهو:

$$|A| = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 6 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = 14 - 24 + 10 = 0$$

أما رتبة المصفوفة فتساوي 2 مادام محدد اكبر المصفوفات الفرعية لا يساوي صفر وكما مبين في آلاتي على سبيل المثال:

$$\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 14 \neq 0$$

$$\therefore r(A) = 2$$

و إذا وضعنا المعادلات أعلاه في الصيغة العامة:

**AX=B**

فإن معادلات المصفوفة $(A|B)$ تساوي:

$$(A|B)=\begin{bmatrix}1 & 3 & -1 & 12\\ 2 & 6 & -2 & 7\\ 2 & 1 & 2 & 11\end{bmatrix}$$

وإن: $r(A|B)=3$ مادام:

$$\begin{vmatrix}3 & -1 & 12\\ 6 & -2 & 7\\ 1 & 2 & 11\end{vmatrix}=-108+59+120=71\neq 0$$

وحيث أن $r(A)\neq r(A|B)$ فإن هذه المجموعة من المعادلات لا حل لها مادامت غير منسجمة منطقياً ( ويبدو واضحاً أن المعادلة الأولى والثانية

غير منسجمة بشكل واضح ) حيث إن المعادلة الثانية ما هي إلا المعادلة الأولى مضروبة في (2) ما عدا الحد الثابت **b** فإنه بدلاً من أن يكون (24) ظهر في المعادلة (7).

<u>مثال(2):</u>

إذا أخذنا مجموعة المعادلات أعلاه بعد إزالة عدم الانسجام بينها وبالشكل التالي نجد أن:

$$x+3y-z=12$$

$$2x+6y-2z=24$$

$$2x+y+2z=11$$

فإن:

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 3 & -1\\ 2 & 6 & -2\\ 2 & 1 & 2\end{vmatrix}=0$$

وإن: $r(A) = 2$

كما أن $r(A|B) = 2$ مادام:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 12 \\ 6 & -2 & 24 \\ 1 & 2 & 11 \end{vmatrix} = 0$$ وكذلك أي محدد لمصفوفة فرعية أخرى = 0

وإن: $r(A) = r(A|B) = 2 < n$

حيث أن: n = 3

ولهذا فإن لمجموعة المعادلات أعلاه، حلول لا حدود لها وإن صفوف ( وأعمدة ) معاملات المصفوفة مرتبطة خطياً ( وكما هو واضح بالنسبة للمعادلة الأولى والثانية ).

<u>مثال(3):</u>

أذا أخذنا المجموعة التالية من المعادلات الآتية:

$$x + 3y - z = 12$$

$$2x + 6y - 2z = 7$$

$$2x + y + 2z = 11$$

ولما كان:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -6 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -10 - 24 - 14 = -48 \neq 0$$

وإن:

$$r(A) = 3$$

$$r(A|B) = 3$$

ولما كانت: n = 3

$$\therefore r(A) = r(A|B) = 3 = n$$

ولهذا فإن المجموعة لها حل وحيد.

## 3-11 حل المعادلات الخطية الآنية
## Solution of Simultaneous Linear Equations

توجد طرق عديدة لحل المعادلات الآنية الخطية نتناول بعضها لغرض إيجاد حل وحيد لمجموعة من هذه المعادلات وإذا ما وجد بأن عمليات الطريقة المستخدمة قد توقفت فإن ذلك يشير إلى عدم وجود الحل الوحيد. ومن الطرق المستخدمة:

**1- طريقة معكوس المصفوفة:**

وتتلخص في أن آية مجموعة مثل n من المعادلات الخطية الآنية ذات n من المجاهيل يمكن كتابتها على الشكل التالي:

$$A_{n\times n}X_{n\times 1} = B_{n\times 1}$$

ويستخرج حل هذه المعادلات عن طريق معكوس A وعند ذاك يمكن كتابتها بالصورة الآتية:

$$X_{n\times 1} = A^{-1}_{n\times n}B_{n\times 1}$$

**2- أما الطريقة الثانية فهي الطريقة الجدولية:**

فحسب الصيغة العامة التي ذكرت سابقاً يمكن كتابة النموذج أعلاه على شكل جدول وكما يلي:

$$(A|I|B)$$

ومن هذا الجدول نستخرج الجدول الآتي:

$$(I|A^{-1}|X)$$

3- **طريقة استخدام المحددات:**

تعرف بقاعدة كرامر (cramer rule) بموجب هذه الطريقة يمكن حل النموذج التالي:

$$A_{nn}\ X_{nx1} = B_{nx1}$$

وتعمل آلية طريقة المحددات طبقاً لقاعدة كرامر كالآتي:

$$X_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & . & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & . & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ b_n & a_{n2} & . & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|}$$

$$X_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & . & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & . & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & b_n & . & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|}$$

$$X_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & . & b_2 \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & b_n \end{vmatrix}}{|A|}$$

ويلاحظ أن مقام المعادلات أعلاه هو محدد معاملات المجاهيل .

كما يلاحظ أن بسط المعادلات أعلاه هو محدد معاملات المجاهيل مع إضافة عمود الثوابت (b) بدلاً من العمود (i) من المصفوفة. وإذا كانت النتيجة $|A| = 0$ فإن خارج

القسمة في قاعدة ( كرامر ) تصبح غير محددة ولهذا لا حل وحيد لمجموعة المعادلات الآنية المعنية.

مثـال:

حل المعادلات الآنية التالية:

$$4x_1 + x_2 - x_3 = 5$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 9$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 = 10$$

الجـواب: إن الحل يمكن أن يستخرج إما:

1- بتطبيق الصيغة الجدولية:

$$(A|I|B)$$

وبإجراء العمليات المطلوبة يستخرج الجدول التالي:

$$(I|A^{-1}|X)$$

ويقرأ الجواب من الجدول الآتي مباشرة: $(I|X)$

2- أو يستحصل مما يلي:

$$X = A^{-1}B$$

3- أو بطريقة كرامر: التي شرحناها مفصلاً في أعلاه. دعنا نحاول حل هذه المسالة بالطريقة الجدولية.

1- **الطريقة الجدولية**: يوضع النموذج بالجدول الآتي:

$$(A|I|B)$$

ثم نقوم بحل الجدول بنفس عمليات استخراج معكوس المصفوفة وكما يلي:

| X | A | I | B | Check |
|---|---|---|---|---|
| X1 | $4 \quad 1 \quad -1$ | $1 \quad 0 \quad 0$ | 5 | 10 |
| X2 | $1 \quad -1 \quad 2$ | $0 \quad 1 \quad 0$ | 9 | 12 |
| X3 | $2 \quad 2 \quad 1$ | $0 \quad 0 \quad 1$ | 10 | 16 |
| X1 | $1 \quad \frac{1}{4} \quad -\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4} \quad 0 \quad 0$ | $\frac{5}{4}$ | $\frac{10}{4}$ |
| X2 | $0 \quad -\frac{5}{4} \quad \frac{9}{4}$ | $-\frac{1}{4} \quad 1 \quad 0$ | $\frac{31}{4}$ | $\frac{38}{4}$ |
| X3 | $0 \quad \frac{6}{4} \quad \frac{6}{4}$ | $-\frac{2}{4} \quad 0 \quad 1$ | $\frac{30}{4}$ | $\frac{44}{4}$ |
| X1 | $1 \quad 0 \quad \frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5} \quad \frac{1}{5} \quad 0$ | $\frac{14}{5}$ | $\frac{22}{5}$ |
| X2 | $0 \quad 1 \quad -\frac{9}{5}$ | $\frac{1}{5} \quad -\frac{4}{5} \quad 0$ | $-\frac{31}{5}$ | $\frac{38}{5}$ |
| X3 | $0 \quad 0 \quad \frac{21}{5}$ | $-\frac{4}{5} \quad \frac{6}{5} \quad 1$ | $\frac{84}{5}$ | $\frac{112}{5}$ |
| X1 | $1 \quad 0 \quad 0$ | $\frac{5}{21} \quad \frac{1}{7} \quad -\frac{1}{21}$ | 2 | $\frac{70}{21}$ |
| X2 | $0 \quad 1 \quad 0$ | $-\frac{1}{7} \quad -\frac{2}{7} \quad \frac{3}{7}$ | 1 | 2 |
| X3 | $0 \quad 0 \quad 1$ | $-\frac{4}{21} \quad \frac{2}{7} \quad \frac{5}{21}$ | 4 | $\frac{112}{21}$ |

ومن الجدول نستخلص قيمة $x_1, x_2, x_3$ كالآتي:

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = 1$$

$$x_3 = 4$$

2- **أما حسب قاعدة (كرامر)** فيأخذ الحل الأسلوب الآتي:

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -20+3-4 = -21$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 9 & -1 & 2 \\ 10 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-21} = \frac{-25+11-28}{-21} = 2$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 5 & -1 \\ 1 & 9 & 2 \\ 2 & 10 & 1 \end{vmatrix}}{-21} = \frac{-44+15+8}{-21} = 1$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 9 \\ 2 & 2 & 10 \end{vmatrix}}{-21} = \frac{-112+8+20}{-21} = 4$$

إذن: $x_3 = 4$ ، $x_2 = 1$ ، $x_1 = 2$

3- أما الحل بطريقة معكوس المصفوفة فكما يلي:

$$X = A^{-1}B$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{21} & \frac{1}{7} & -\frac{1}{21} \\ -\frac{1}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ -\frac{4}{21} & \frac{2}{7} & \frac{5}{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

إذن الحل هو: $x_1 = 2, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 4$

وما يلاحظ أن هذا الحل يتطلب استخراج معكوس المصفوفة $A^{-1}$ قبل المباشرة به.

### تمارين (1-3)

**1- جد ناتج ما يأتي:**

أ- $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

ب- $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

ج- $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

د- $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

**2- إذا كان:**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

جد ما يأتي:

أ- $AB$

ب- $A'B$

ج- $(BA)'$

د- $A^2$

هـ- $3(AB - B)$

**3-** جد محدد المصفوفات الآتية:

أ- $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$

ب- $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

ج- $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

**4-** إذا كانت:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -2 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 6 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

**5-** جد ما يأتي:

أ- $A^{-1}$

ب- $(AB)^{-1}$

ج- $A^{-1}B^{-1}$

د- $A^{-1}B$

6- خذ المعادلات الآنية التالية وحدد فيما إذا كان لها حلاً وحيداً ثم جد هذا الحل:

أ- $x-3y=-2$

$2x+7y=3$

ب- $x+y+z=7$

$2x+3y=10$

$5x-z=1$

ج- $2x+8y-7z=1$

$2x-5y+6z=7$

$3x+3y-z=8$

د- $3x+2y-3z=10$

$x+y-z=2$

$2x+y-2z=4$

7- جد رتبة كل من المصفوفات الآتية:

أ- $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

ب- $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 6 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

الجزء الأول

ج- $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & 6 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 6 \\ 8 & 0 & 12 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

د- $\begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 5 & -1 & -3 \end{bmatrix}$

**8-** إذا كانت:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

جد ما يأتي:

أ- $A^{-1}(A)A^{-1}$

ب- $A^{-1}B$

ج- $(BA)^{-1}$

# الفصل الرابع

# تحليل المستخدم-المنتج

# Input-Output Analysis

# تحليل المستخدم - المنتج

## Input- Output Analysis

### 4-1 مقدمة

يعتبر تحليل المستخدم - المنتج إحدى الطرق العملية المهمة في دراسةطبيعة العلاقات التشابكية بين الأنشطة الاقتصادية المختلفة سواء كانت إنتاجية أو استهلاكية أو غيرها وكان أول من تناول العلاقات المتبادلة بين القطاعات الاقتصادية بالصيغة المسماة (بجدول المستخدم - المنتج) الاقتصادي المعروف ليونتيف[⊠] (wassily Leontief) سنة 1941 . أن الأساس الذي بنيت عليه جداول المستخدم المنتج هو معرفة حجم الإنتاج الكلي الذي يجب آن ينتجه كل قطاع لتلبية حاجات الطلب النهائي بافتراض ثبات الأسعار والمستوى التكنولوجي للإنتاج . وعليه فإن بناء الجداول يقوم على افتراض آن: الإنتاج الكلي = مستلزمات الإنتاج + الطلب النهائي . لقد ظهرت في كتابات ليونتيف حول هذا الموضوع جداول واضحة وواسعة وعملية تشرح مجمل التدفقات بين قطاعات الاقتصاد الوطني.

لقد هيأت دراسة التشابك بين فروع الاقتصاد الوطني الوسائل الفاعلة في بناء النماذج الاقتصادية والوقوف على تطبيقاتها العملية الممكنة ودراسة الآثار التي تنجم عن التغيرات في قطاع أو بعض القطاعات على مجمل النشاط الاقتصادي .. فإذا قررت الحكومة ضمن سياسة مالية جديدة أجراء تخفيض في نفقاتها الجارية ( الاستهلاكية ) فماذا سيحدث من تأثيرات على القطاعات الاقتصادية المختلفة ؟ أن إنتاج البعض منها سيتزايد والبعض الآخر سينخفض وهناك من لا يتأثر ألا بنسبة ضئيلة أو قد لا يتأثر . فتأثير التخفيض في الأنفاق قد يؤدي إلى: انخفاض العمالة والتوظيف لدى جهاز

---

[⊠] واسلي ليونتيف : عالم اقتصادي ولد في روسيا سنة 1906 ودرس في جامعة كييل بألمانيا سنة 1927 ثم رحل إلى هارفرد في الولايات المتحدة . ليشتغل منصب أستاذ الاقتصاد فيها سنة 1946 . أهم دراساته هي عن جداول المستخدم - المنتج.

الحكومة وهذا بدوره يؤدي إلى انخفاض الاستهلاك الخاص بسبب اختفاء دخول الخارجين من الخدمة الحكومية والتحاقهم في أتون البطالة أو قد يؤدي آلي زيادة الاستهلاك الخاص المتأتي من احتمال اتجاه الحكومة نحو تخفيض الضرائب بعد آن انخفضت الحاجة إلى الأموال لتمويل الموازنة الجارية وربما تتجه الحكومة إلى توظيف الأموال الفائضة لديها نتيجة تخفيض الأنفاق الجاري إلى زيادة الاستثمارات في المدارس والمستشفيات لغرض زيادة الرفاهية الاجتماعية حيث سينعكس تأثير تخفيض النفقات الجارية على مشتريات الحكومة من القطاع الخاص من السلع التجارية والخدمات وهذا بدوره يؤدي إلى انكماش الإنتاج بسبب انخفاض الطلب وهناك احتمال اتجاه بعض صناعات القطاع إلى زيادة إنتاجها من سلع الاستثمار لتلبية الزيادة في طلب الحكومة عليها ... وهكذا من التأثيرات المتبادلة التي تنجم عن تغير معين حدث في إنتاج إحدى القطاعات الاقتصادية فأصاب في تأثيره عدد كبير من القطاعات المذكورة .

من هنا تتضح أهمية تحليل المستخدم - المنتج في الدراسات الاقتصادية الكمية إضافة إلى استخدامه كوسيلة للتنبؤ والتخطيط . وحيث آن هذا الموضوع واسع وكبير لهذا سنقتصر في عرضنا له على شرح المفاهيم الأساسية له وأسلوب تكوين جدول المستخدم - المنتج ومصفوفاته وبناء النماذج الاقتصادية المتعلقة به وبيان سبل حل هذه النماذج ، مع بعض التطبيقات العملية .

## 4-2 مكونات جدول المستخدم - المنتج

يتكون جدول المستخدم - المنتج من عناصر محسوبة بالكمية أو بالقيمة يوضح كل واحد منها الكيفية التي يتوزع فيها الإنتاج في صناعة معينة على الصناعات الأخرى كمستلزمات إنتاج أو كاستهلاك نهائي . وهذا يقتضي تقسيم الاقتصاد الوطني إلى نوعين من القطاعات : الأول القطاع الإنتاجي والثاني القطاع الاستهلاكي وتقسيم القطاع الإنتاجي إلى عدد كبير من القطاعات الإنتاجية الفرعية وكذلك تقسيم القطاع الاستهلاكي إلى قطاعات مستهلكة فرعية . وحساب الآثار التي يتركها تغير عنصر أو أكثر على مجمل عناصر الجدول.

ودعنا نبدأ بعرض جدول افتراضي يحتوي على قطاعين إنتاجين هما الزراعة والصناعة فقط أما الطلب النهائي على السلع والخدمات فيتكون من الاستهلاك الخاص والاستهلاك الحكومي والخزين والمتبقي يصدر إلى الخارج . وفي حساب العوامل الأولية فأنه يفترض أنها تتكون من الأجور والأرباح والاستيرادات ، وحسب الافتراضات أعلاه يظهر الجدول كما يأتي:

جدول رقم (4-1)

نموذج لجدول المستخدم - المنتج

| إلى / من | 1<br>الزراعة | 2<br>الصناعة | 3<br>1+2 | 4 5 6 7<br>C G S E | 8<br>4+...7 | T.output<br>3+8 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1-الزراعة<br>2- الصناعة | 5<br>20 | 10<br>25 | 15<br>45 | 20 4 5 6<br>10 2 0 3 | 35<br>15 | 50<br>60 |
| 3- (1+2) | 25 | 35 | 60 | 30 6 5 9 | 50 | 110 |
| 4- M<br>5- w&p | 10<br>15 | 10<br>15 | 20<br>30 | 5 5 0 0<br>0 5 0 0 | 10<br>5 | 30<br>35 |
| 6- (4+5) | 25 | 25 | 50 | 5 10 0 0 | 15 | 65 |
| 7-T. output<br>(3+6) | 50 | 60 | 110 | 35 16 0 9 | 65 | --- |

**ويلاحظ من الجدول ما يأتي :**

1- كل صف من الجدول يعطي حسابا كاملا عن الجهة التي يذهب أليها الإنتاج ، فالقطاع الزراعي الذي ينتج 50 وحدة يذهب منها كمستلزمات إنتاج 5 وحدات للقطاع نفسه و 10 وحدات للقطاع الصناعي . أي ما مجموعه 15 وحدة تذهب كمواد أولية للقطاعين الزراعي والصناعي .

كما تذهب منها 20 وحدة للاستهلاك العائلي و 4 وحدات لاستخدامات الحكومة و 5 وحدات لأغراض المخزون و 6 وحدات تصدر للخارج .

2- كل عمود في الجدول يعطي حسابا عن كمية ( ثمن ) الإنتاج الذي استلمه كل قطاع معين من القطاعات الأخرى ليستعمله كمستخدمات . فالعمود الثاني مثلاً يوضح حصول القطاع الصناعي على ما يأتي من القطاعات الأخرى :

10 وحدات من الزراعة واستلم قيمتها القطاع الزراعي كذلك حصل على 25 وحدة من القطاع الصناعي نفسه واستلم القطاع ثمنها . كذلك تسلم 10 وحدات من القطاع الاستيرادات وأستلم خدمات عمل ورأس المال ودفع أجور وأرباحا عنها مقدارها 15 وحدة وبهذا يكون مجموع ما حصل عليه من جميع القطاعات 60 وحدة وهو مقدار إنتاج القطاع نفسه ودفع قيمتها للقطاعات المجهزة .

## 4-3 مصفوفة المبادلات Transactions Matrix

ويقصد بمصفوفة المبادلات. المصفوفة التي تبين مقدار ما يسلمه القطاع من المستخدمات أو الاستعمالات من/ والى القطاعات الأخرى . لنأخذ الجدول (4-1) وهو نموذج مبسط لجدول المستخدم - المنتج ونكيفه على شكل مصفوفة ذات مصفوفات فرعية وقبل البدء بذلك دعنا نسمي المصفوفات الفرعية كما في المخطط آلاتي :

جدول رقم (4-2)

المصفوفة العامة المستخدم - المنتج

| إلى / من | 12 | 4567 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|
| 1<br>2 | A | B | F | X |
| 4<br>5 | P | L | R | Z |
| 7 | X | Q | Z | - |

وتحتوي هذه المصفوفة على ما يأتي :

$a_{ij}$ : مصفوفة $m \times n$ وتحتوي على الإنتاج المتدفق بين القطاعات الإنتاجية.

$x_i$ : موجه عمودي $m \times 1$ يمثل الإنتاج الكلي المنتج من قبل القطاع i والمسلم للقطاع j .

$x_j$ : موجـه أفقـي $m \times 1$ يمثـل المـستخدمات المنتجـة مـن القطـاع i والمـسلمة للقطاع j.

$b_{ij}$ : مصفوفة $m \times n$ وتحتوي على مكونات الطلب النهائي المشتراة من القطاعات الإنتاجية .

$p_{ij}$ : مصفوفة $k \times m$ وتحتوي على مكونات العوامل الأولية التي تدخل في الإنتاج.

$l_{ij}$ : مصفوفة $k \times n$ وفيها مكونات الطلب النهائي المشتراة من العوامل الأولية .

$f_{ij}$ : موجه عمودي $m \times 1$ ويحتوي على مجموع ما تستلمه مفردات الطلب النهائي من القطاع i

.

$r_i$ : موجـه عمـودي $k \times 1$ ويحتـوي عـلى مجمـوع مـا تـستلمه مفـردات الطلـب النهـائي مـن الاستيرادات وعناصر الإنتاج .

$q_j$ : موجــه أفقــي $1 \times n$ ويحتــوي عــلى مجمــوع كــل مفــردة مــن مفــردات الطلــب النهائي i .

$z_i$ : موجه عمودي $k \times 1$ ويضم مجموع كل مفردة من العوامل الأولية i .

وبذلك يمكن كتابة المصفوفة العامة (4-2) حسب عناصرها كما هي مسماة في الجدول رقم (4-1) كما يأتي :

جـدول رقم (4-3)

عناصر المصفوفة العامة للمستخدم - المنتج

| من \ إلى | 1 2 | 4 5 6 7 | 8 مجموع الطلب النهائي | 9 الإنتاج |
|---|---|---|---|---|
| 1- الزراعة<br>2- الصناعة | $a_{11}$ $a_{12}$<br>$a_{21}$ $a_{22}$ | $b_{11}$ $b_{12}$ $b_{13}$ $b_{14}$<br>$b_{21}$ $b_{22}$ $b_{23}$ $b_{24}$ | $f_1$<br>$f_2$ | $x_1$<br>$x_2$ |
| 4- الاستيرادات<br>5- الأرباح والأجور | $p_{11}$ $p_{12}$<br>$p_{21}$ $p_{22}$ | $l_{11}$ $l_{12}$ $l_{13}$ $l_{14}$<br>$l_{21}$ $l_{22}$ $l_{23}$ $l_{24}$ | $r_1$<br>$r_2$ | $z_1$<br>$z_2$ |
| 7- الإنتاج | $x_1$ $x_2$ | $q_1$ $q_2$ $q_3$ $q_4$ | . | . |

ويمكن صياغة نتائج المصفوفة العامة أعلاه على شكل معادلات كالآتي :

(مجموع إنتاج القطاع i ) :

$$\sum_{j=1}^{2} a_{ij} + \sum_{j=1}^{4} b_{ij} = x_i \quad (4\text{-}1)$$

(مجموع الاستيرادات عناصر الإنتاج ) :

$$\sum_{j=1}^{2} p_{ij} + \sum_{j=1}^{4} l_{ij} = z_i \quad (4\text{-}2)$$

(مجموع المفردة j من الطلب النهائي ) :

$$\sum_{j=1}^{2} b_{ij} + \sum_{j=1}^{4} l_{ij} = q_i \quad (4\text{-}3)$$

## 4-4 المصفوفة الفنية Technology matrix

وهي المصفوفة التي توضح الكميات التي يستخدمها القطاع j منسوبة إلى مجموع إنتاجه (مستخدماته) والتي تعتبر فنيا ملائمة للقطاع كي يصبح قادراً على إنتاج المستوى المرغوب من الإنتاج والمبين في الجدول (4-1).

وقبل البدء باستخراج المصفوفات الفرعية الفنية للمصفوفة الفنية العامة دعنا نسمي هذه المصفوفات برموز أخرى غير الواردة في الجدول رقم ( 4-3 ) لغرض التمييز وتبسيط العمل ولا حاجة لتبديل تسمية كل من الموجهات (Z , R , F , Q , X) لأنها تمثل مجاميع . أما رموز المصفوفة الجديدة ( المصفوفة الفنية ) فهي :

جدول رقم (4 - 4)

المصفوفة الفنية العامة

| من / إلى | 1 2 | 4 5 6 7 | 8 | 9 الإنتاج |
|---|---|---|---|---|
| 1 2 | D | C | F | X |
| 4 5 | U | H | R | Z |
| 7 الإنتاج | X | Q | - | - |



والآن نوضح كيفية استخراج المصفوفات الفرعية أعلاه :

$$c_{ij} = \frac{b_{ij}}{Q_j} \qquad d_{ij} = \frac{a_{ij}}{X_j}$$

$$h_{ij} = \frac{L_{ij}}{Q_j} \qquad u_{ij} = \frac{P_{ij}}{X_j}$$

ومن الجدول (4-1) يمكن استخراج المصفوفة D كالآتي :

$$D = \begin{bmatrix} \frac{a_{11}}{x_1} & \frac{a_{12}}{x_2} \\ \frac{a_{21}}{x_1} & \frac{a_{22}}{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{50} & \frac{10}{60} \\ \frac{20}{50} & \frac{25}{60} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{10} \\ \frac{5}{12} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

وهي مصفوفة المعاملات الفنية D .

وكذلك الحال بالنسبة للمصفوفات الفرعية H , C , R , U حيث يمكن استخراجها بنفس الطريقة أعلاه ونحصل على مصفوفة المعاملات الفنية لجدول المستخدم المنتج المبينة في أدناه:

جدول رقم (4-5)

مصفوفة المعاملات الفنية (بالأعداد)

| | |
|---|---|
| D: $\begin{matrix} \frac{1}{10} & \frac{1}{6} \\ \frac{2}{5} & \frac{5}{12} \end{matrix}$ | C: $\begin{matrix} \frac{4}{7} & \frac{1}{4} & 1 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{7} & \frac{1}{8} & 0 & \frac{11}{3} \end{matrix}$ |
| U: $\begin{matrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{4} \end{matrix}$ | H: $\begin{matrix} \frac{1}{7} & \frac{5}{16} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{16} & 0 & 0 \end{matrix}$ |

ولو أخذنا العنصر $\frac{1}{10}$ من المصفوفة D فأنه يعني أن القطاع الزراعي يستخدم ما مقداره $\frac{1}{10}$ من إنتاجه البالغ ( 50) كمدخلات في عملياته الإنتاجية أما العنصر $\frac{2}{5}$ من المصفوفة فيشير إلى أن القطاع الزراعي يستخدم ما نسبته $\frac{2}{5}$ من مجموع إنتاجه البالغ ( 50 ) كمدخلات أيضا في عملياته الإنتاجية يستلمها من القطاع الصناعي . كذلك بالنسبة لمستخدمات القطاع من الاستيرادات ومن عناصر الإنتاج فأنه يستخدم ما نسبته $\frac{1}{5}$ من مجموع إنتاجه كمدخلات يستلمها من قطاع الاستيراد ويستخدم أيضاً $\frac{3}{10}$ من مجموع إنتاجه كمدخلات تجهز له من عناصر الإنتاج . ويصبح ما استلمه القطاع من منتجات القطاعات الأخرى ومن منتجاته نفسها مساويا لمجموع إنتاجه أي أن:

$$\frac{1}{10}(50)+\frac{2}{5}(50)+\frac{1}{5}(50)+\frac{3}{10}(50)$$

$$=5+20+10+15$$

$$=50$$

وحين العودة إلى الجدول رقم (4-5) يمكن كتابة عناصر المصفوفات H ,U , C , D كالآتي:

جدول رقم (4-6)

مصفوفة المعاملات الفنية ( بالرموز )

| | |
|---|---|
| $d_{11}$ $d_{12}$<br>$d_{21}$ $d_{22}$ | $c_{11}$ $c_{12}$ $c_{13}$ $c_{14}$<br>$c_{21}$ $c_{22}$ $c_{23}$ $c_{24}$ |
| $u_{11}$ $u_{12}$<br>$u_{21}$ $u_{22}$ | $h_{11}$ $h_{12}$ $h_{13}$ $h_{14}$<br>$h_{21}$ $h_{22}$ $h_{23}$ $h_{24}$ |



واستناداً للجدول أعلاه فإن مجموع المنتجات التي استلمها القطاع الزراعي والتي تساوي مجموع إنتاجه والبالغ (50) كما مبين أعلاه يمكن وصفها في المعادلة الآتية :

$$x_j=\sum_{i=1}^{m}d_{ij}\ x_j+\sum_{i=1}^{k}u_{ij}\ x_j \quad (j=1,2,\dots,m)$$

(4-5)

ولو أخذنا j = 1 لتشير إلى القطاع الزراعي وهو يحتل العمود الأول من الجدول كمثال لنحصل على :

$$\therefore\ x_j=\sum_{i=1}^{m}d_{ij}\ x_j+\sum_{i=1}^{k}u_{ij}\ x_j$$

$$=(d_{11}x_1+d_{21}x_1)+(u_{11}x_1+u_{21}x_1)$$

$$\frac{1}{10}(50)+\frac{2}{5}(50)+\frac{1}{5}(50)+\frac{3}{10}(50)$$

$$=5+20+10+15$$

$$=50$$

ومن جهة أخرى فإن $xj = xi$ : في حالة j = i .

وان

$$x_j = \sum_{j=1}^{m} d_{ij}\ x_j + fi \qquad (i = 1,2,\dots,m) \qquad (4\text{-}6)$$

وبتعبير آخر فإن :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{2} d_{1j} x_j \\ \sum_{j=1}^{2} d_{2j} x_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

وبصيغة أكثر توسعا فإن :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \qquad (4\text{-}7)$$

وبالرموز العامة للمصفوفات فإن العلاقة (4-7) يمكن كتابتها بالصورة الآتية:

$$X=DX+F$$

$$F=X-DX$$

$$F=IX-DX$$

$$F=(I-D)X \qquad (4\text{-}8)$$

حيث أن $I_{m\times m}$ مصفوفة محايدة و$F_{m\times 1}$ موجه الطلب النهائي كما مشار إليها في الجدول رقم (4-2) و $D_{m\times m}$ مصفوفة المعاملات الفنية للمصفوفةA و $X_{m\times 1}$ موجه يحتوي على إنتاج القطاعين الزراعي والصناعي على التوالي .

والمصفوفة (I-D) تسمى مصفوفة ليونتيف ويمكن استخراجها من الجدول (5-4) كما يأتي:-

$$(I-D)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\frac{1}{10} & \frac{1}{6}\\ \frac{2}{5} & \frac{5}{12}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{9}{10} & -\frac{1}{6}\\ -\frac{2}{5} & \frac{7}{12}\end{bmatrix}$$

ومن المفيد معرفة معنى هذه المصفوفة . ولنتناول عناصرها الأربعة واحدا بعد الآخر:

1- العنصر $\frac{9}{10}$ يعني من بين مجموع إنتاج القطاع الزراعي والذي يساوي واحد صحيح بمفهوم المعاملات الفنية هناك $\frac{9}{10}$ منه يذهب إلى كل من القطاع الصناعي والطلب النهائي و $\frac{1}{10}$ فقط يبقى لاستعمالات القطاع نفسه كمستلزمات إنتاج .

2- العنصر $-\frac{1}{6}$ يشير إلى أن القطاع الزراعي أستقطع كمية من إنتاجه قدرت نسبتها $\frac{1}{6}$ من مجموع إنتاج القطاع الصناعي لتلبية متطلبات القطاع الصناعي كمستلزمات إنتاج والباقي وجه للطلب النهائي ولمتطلبات القطاع الزراعي .

3- العنصر $(-\frac{2}{5})$ يفيد أن القطاع الصناعي استقطع كمية مقدارها $\frac{2}{5}$ من مجموع الإنتاج الزراعي لأجل الإيفاء بمتطلبات القطاع الزراعي كمستلزمات إنتاج والباقي وجه للطلب النهائي وللقطاع نفسه .

4- العنصر $\frac{7}{12}$ يوضح بأن $\left(\frac{7}{12}\right)$ من مجموع إنتاج القطاع الصناعي ذهب للطلب النهائي والقطاع الزراعي والباقي لأغراض القطاع نفسه وإذا أخذنا العلاقة (4-8) وهي :

$$F = (I - D)X$$

فإن:

$$X = (I - D)^{-1}F \qquad (4\text{-}9)$$

وحيث أن :

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{4}{7} & \frac{1}{4} & 1 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{7} & \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 35 \\ 16 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 35 \\ 15 \end{bmatrix}$$

وبالرموز العامة للمصفوفات يمكن أن تكتب العمليات أعلاه كما يأتي :

$$F = CQ' \qquad (4\text{-}10)$$

وهكذا تصبح العلاقة (4-9) بالصيغة الآتية :

$$X = (I - D)^{-1}CQ' \qquad (4\text{-}11)$$

والعلاقة الجديدة (4-11) تستخدم في استخراج مستوى الإنتاج X عندما يتغير الموجه الذي يحتوي على مكونات الطلب النهائي Q مع الإشارة إلى أن C , D هي المعاملات الفنية لمصفوفة جدول المستخدم - المنتج و(i) المصفوفة المحايدة .

ولما كان :

$$Z = UX + R \qquad (4\text{-}12)$$

حيث أن Z هو موجه $k \times 1$ ونعيد تعريفه بكونه يمثل الكميات اللازمة من المنتجات الأولية المشتراة من قبل القطاعات كمستلزمات إنتاج إضافة إلى ما يذهب منها مباشرة لمفردات الطلب النهائي . أما U , X , R فهي مصفوفات معرفة مسبقاً .

ولتوضيح ذلك فإن :

$$X = \begin{bmatrix} 50 \\ 60 \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} 30 \\ 35 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

ومن العلاقة (4-12), (4-9) يمكن كتابة العلاقة الآتية :

$$Z = U(I - D)^{-1} F + R \qquad (4\text{-}13)$$

حيث أن :

$$R = HQ' \qquad (4\text{-}14)$$

ولإيضاح ذلك فإن هذه المصفوفات كما في الجدول (4-1) (4-4) هي :

$$R = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{5}{16} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{16} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 35 & 16 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

ومن العلاقة (4-13) ، (4-14) نستنتج ما يأتي :

$$Z = U(I - D)^{-1} F + HQ'$$

الفصل الرابع

ولكن $F = CQ'$ من العلاقة (4-10)

$$\therefore Z = U(I-D)^{-1}CQ' + HQ'$$

$$Z = [U(I-D)^{-1}C + H]Q'$$

و (4-15)

## 4-5 معاملات جدول المستخدم - المنتج التراكمية
## Cumulative Input - Output Coefficients

إذا لاحظنا الجدول (4-4) الذي يعبر عن المعاملات الفنية للمستخدم - المنتج فإن الجدول آلاتي المستخلص من العلاقات (4-9) (4-12) (4-15) يعطينا جدولا يسمى بجدول معاملات المستخدم - المنتج التراكمية ويأخذ الصيغة المصفوفية آلاتية :

$$\begin{bmatrix} (I-D)^{-1} & (I-D)^{-1}C \\ U(I-D)^{-1} & U(I-D)^{-1}C + H \end{bmatrix}$$

وإذا أخذنا الجدول (4-5) وحولناه رقميا إلى مصفوفة المعاملات التراكمية أعلاه فأنه يظهر كما يأتي :

نبدأ أولا باستخراج المصفوفة $(I-D)^{-1}$ حسب الخطوات التالية :

(باستخدام إحدى طرق عكس المصفوفات المبينة في الفقرة (3-9) الفصل الثالث )

$$(I-D) = \begin{bmatrix} \frac{9}{10} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{2}{5} & \frac{7}{12} \end{bmatrix}$$

$$(I-D)^{-1} \begin{bmatrix} \frac{14}{11} & \frac{48}{55} \\ \frac{4}{11} & \frac{108}{55} \end{bmatrix}$$

ويلاحظ أن العناصر القطرية $(I\text{-}D)^{-1}$ تتميز بكونها تساوي واحد أو أكثر من واحد .

$$(I-D)^{-1}C=\begin{bmatrix}\frac{14}{11} & \frac{48}{55}\\ \frac{4}{11} & \frac{108}{55}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{4}{7} & \frac{1}{4} & 1 & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{7} & \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{376}{385} & \frac{47}{110} & \frac{14}{11} & \frac{188}{165}\\ \frac{296}{385} & \frac{4}{11} & \frac{4}{11} & \frac{148}{165}\end{bmatrix}$$

$$U(I-D)^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{5} & \frac{1}{6}\\ \frac{3}{10} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{70}{55} & \frac{48}{55}\\ \frac{20}{55} & \frac{108}{55}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{152}{165} & \frac{138}{275}\\ \frac{26}{55} & \frac{207}{275}\end{bmatrix}$$

$$U(I-D)^{-1}C=\begin{bmatrix}\frac{1}{5} & \frac{1}{6}\\ \frac{3}{10} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{376}{385} & \frac{47}{110} & \frac{14}{11} & \frac{188}{165}\\ \frac{296}{385} & \frac{37}{110} & \frac{4}{11} & \frac{148}{165}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{706}{1925} & \frac{467}{3300} & \frac{52}{165} & \frac{934}{2475}\\ \frac{934}{1925} & \frac{467}{2200} & \frac{26}{55} & \frac{467}{825}\end{bmatrix}$$

الفصل الرابع

$$U(I-D)^{-1}C+H=\begin{bmatrix}\frac{706}{1925} & \frac{467}{3300} & \frac{52}{165} & \frac{934}{2475}\\ \frac{934}{1925} & \frac{467}{2200} & \frac{26}{55} & \frac{467}{825}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{7} & \frac{5}{16} & 0 & 0\\ 0 & \frac{5}{16} & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{981}{1925} & \frac{5993}{13200} & \frac{52}{165} & \frac{934}{2475}\\ \frac{934}{1925} & \frac{2309}{4400} & \frac{26}{55} & \frac{467}{825}\end{bmatrix}$$

وبذلك يمكن كتابة مصفوفة المعاملات التراكمية كما في الجدول الآتي :

**جدول رقم (4-7)**

**جدول المعاملات التراكمية للمستخدم - المنتج**

| | |
|---|---|
| ① $\begin{bmatrix}\frac{14}{11} & \frac{48}{55}\\ \frac{4}{11} & \frac{108}{55}\end{bmatrix}$ | ② $\begin{bmatrix}\frac{376}{386} & \frac{47}{110} & \frac{14}{11} & \frac{188}{165}\\ \frac{296}{385} & \frac{4}{11} & \frac{4}{11} & \frac{148}{165}\end{bmatrix}$ |
| ③ $\begin{bmatrix}\frac{152}{165} & \frac{138}{275}\\ \frac{26}{55} & \frac{207}{275}\end{bmatrix}$ | ④ $\begin{bmatrix}\frac{981}{1925} & \frac{5993}{13200} & \frac{52}{165} & \frac{934}{2475}\\ \frac{934}{1925} & \frac{2309}{4400} & \frac{26}{55} & \frac{467}{825}\end{bmatrix}$ |

أما تفسير مكونات الجدول فهي كما يأتي :

1- تشير المصفوفة الأولى إلى التغيرات التي تحدث في مستوى الإنتاج وعوامل الإنتاج عندما يحدث تغير في مكونات الطلب النهائي ( الموجه F ) راجع الجدول (4-3). ولتوضيح ذلك إذا أخذنا عمود الزراعة ( العمود رقم (1) ) فإن الجدول (4-7) يخبرنا بأن زيادة وحدة إضافية في الطلب النهائي على الإنتاج الزراعي يتطلب من القطاعات الواردة في هذا الجدول ما يأتي :

أ- قيام القطاع الزراعي بزيادة إنتاجه بمقدار $\frac{14}{11}$ وحدة .

ب- زيادة إنتاج القطاع الصناعي بمقدار $\frac{4}{11}$ وحدة أيضا.

ج- استخدام القطاع الزراعي لمواد مستوردة إضافية قدرها $\frac{152}{165}$ وحدة.

د- وأخيرا احتاج القطاع لدفع أجور عمل وتوزيع أرباح بمقدار $\frac{26}{55}$ .

ومن الواضح أن زيادة استعمال الموارد المستوردة والعمل والإدارة ليس فقط لمواجهة متطلبات القطاع الزراعي ولكن للإيفاء بمتطلبات إنتاج وحدات إضافية في القطاع الصناعي أيضاً .

2- ويلاحظ أن القطاع الزراعي زاد إنتاجه بمقدار $\frac{14}{11}$ أي (1.27) وحدة كي يلبي حاجة الطلب النهائي بمقدار وحدة واحدة والباقي للإيفاء بمتطلبات القطاعات الأخرى والقطاع نفسه .

وعلى هذا الأساس سمي الجدول (4-7) جدول المعاملات التراكمية لكونه يوضح تراكمات الإنتاج سواء في القطاع الذي وقع الطلب على منتجاته أو في القطاعات الأخرى التي يتعين عليها زيادة إنتاجها لتلبية حاجة القطاع الزراعي وحاجتها وحاجة بعضها للبعض الآخر نتيجة الزيادة في إنتاجها . أنها عملية تراكمية تجري وفق قاعدة السبب والنتيجة فتحدث التراكمات بعضها على البعض الآخر إلى أن يفي النموذج كلية بمتطلبات السبب الرئيسي وهو الزيادة في الطلب النهائي بمقدار معين .

3- ويحدث نفس الشيء بالنسبة لعمود القطاع الصناعي أذا زاد الطلب النهائي على منتجاته بوحدة واحدة فإن إنتاجه يزيد بمقدار $\frac{108}{55}$ وحدة تتوزع بمقدار (1) وحدة للطلب النهائي والباقي على القطاعات الأخرى بموجب جدول المعاملات الفنية.

## 4-6 جدول المستخدم - المنتج - والتنبؤ
Forecasting by I/O Model

يمكن استخدام جدول المستخدم - المنتج في التنبؤ بالمتغيرات التي تحدث في مختلف فروع الاقتصاد الوطني التي يغطيها الجدول في حالة حدوث تغير في مفردة أو مجموعة من مفردات الجدول نفسه . وقد أوضحنا في الفقرات السابقة كيفية عمل آلية المعاملات الفنية للجدول وذلك ببيان النتائج النهائية للتغيرات في مجمل القطاعات الاقتصادية عندما يتغير الإنفاق الحكومي مثلاً إلا أن هذه الآلية لا يمكن أن تعمل إلا في ظل افتراضات هامة ينبغي توفرها في هيكل الجدول نفسه نستعرضها بالآتي دون الدخول في مناقشتها ويمكن الرجوع إليها في المصادر التي تتناول دراسة المستخدم - المنتج بتفاصيل كافية:

1- خضوع الإنتاج في جميع القطاعات إلى دالة إنتاج متجانسة من الدرجة الأولى (راجع الفصل الخامس من الجزء الثاني) أي دالة إنتاج خطية وهذا يعني أن كل قطاع يعمل في ظل غلة ثابتة ، فإذا أريد زيادة الإنتاج ثلاث مرات في قطاع معين فإن هذا القطاع يحتاج إلى زيادة مستخدماته ثلاثة مرات أيضا .

2- ثبات المعاملات الفنية من الأجل القصير وعدم تبدلها أي ثبات تكنولوجيا الإنتاج ، فالقطاع الزراعي رغم تغير إنتاجه من مستوى إلى آخر فإن حاجته لمستلزمات الإنتاج تبقى متناسبة مع الإنتاج تناسبا ثابتا ولا تتغير مع مرور الزمن.

3- عدم وجود وفورات اقتصادية خارجية في الإنتاج وعدم وجود ضياعات اقتصادية خلال العملية الإنتاجية .

4- ثبات الأسعار خلال فترة التنبؤ وسيادة حالة التوازن الاقتصادي.

عدم وجود إحلال في طريقة الإنتاج أي أن كل قطاع ينتج سلعة واحدة أو مجموعة من السلع ويترتب على ذلك وجود طريقة فقط لإنتاج هذه السلعة أو مجموعة السلع . ويترتب على ذلك أيضاً أن لكل قطاع إنتاج أولي واحد فقط .

والآن لنأخذ مثال يوضح كيفية التنبؤ باستخدام جدول المستخدم - المنتج اخذين بنظر الاعتبار الشروط أعلاه :

مثال(1):

قدم الجدول الآتي للقسم المختص في التخطيط والتنبؤ في وزارة الاقتصاد وطلب منه حساب ما يأتي

:

جدول رقم (8-4)

| إلى / من | 1 الزراعة | 2 الصناعة | 3 الخدمات | 4 $\sum_{1}^{3}$ | 5 الاستهلاك | 6 الاستثمار | 7 الصادرات | 8 $\sum_{5}^{7}$ | 9 الإنتاج 4+8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1- الزراعة | 50 | 40 | 75 | 165 | 25 | 0 | 10 | 35 | 200 |
| 2- الصناعة | 0 | 80 | 75 | 155 | 100 | 50 | 15 | 165 | 320 |
| 3- الخدمات | 75 | 80 | 75 | 230 | 50 | 10 | 10 | 70 | 300 |
| | (A) | | | | (B) | | | (F) | (X) |
| 4- $\sum_{1}^{3}$ | 125 | 200 | 255 | 550 | 175 | 60 | 35 | 270 | 820 |
| 5- الاستيرادات | 25 | 20 | 0 | 45 | 25 | 30 | 0 | 55 | 100 |
| 6- الأرباح | 25 | 40 | 37.5 | 102.5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 102.5 |
| 7- الضرائب غير المباشرة | 25 | 60 | 37.5 | 122.5 | 50 | 10 | 0 | 60 | 182.5 |
| | (P) | | | | (L) | | | (R) | (Z) |
| 8- $\sum_{5}^{7}$ | 75 | 120 | 75 | 270 | 75 | 40 | 0 | 115 | 385 |
| الإنتاج 4+8 | 200 | 320 | 300 | 820 | 250 | 100 | 35 | 385 | - |
| | (X) | | | | (Q) | | | | |

1- ماذا سيكون عليه مستوى الإنتاج في القطاعات الثلاثة ( الزراعة والصناعة والخدمات ) إذا حدث تغير في مجموع فقرات الطلب النهائي من كل قطاع كالآتي :

من $\begin{bmatrix} 35 \\ 165 \\ 70 \end{bmatrix}$ إلى $\begin{bmatrix} 37.5 \\ 180 \\ 75 \end{bmatrix}$

2- ماذا سيكون عليه مستوى الإنتاج في القطاعات الثلاثة إذا تغيرت عناصر الطلب النهائي من [ 35 100 250 ] إلى [40 120 300 ]

الجواب:

قبل البدء بتنفيذ الحسابات المطلوبة لا بد من تهيئة ما يأتي :

أ- جدول المعاملات الفنية ويجري إعداده وفق الفقرة ( 4 - 4 ) وكما مبين أدناه :

جدول رقم ( 4-9 ) جدول المعاملات الفنية

| | |
|---|---|
| C: $\begin{matrix} \frac{1}{10} & 0 & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{2} & \frac{3}{7} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & \frac{2}{7} \end{matrix}$ | D: $\begin{matrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{matrix}$ |
| H: $\begin{matrix} \frac{1}{10} & \frac{3}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & 0 \end{matrix}$ | U: $\begin{matrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{16} & \frac{1}{8} \end{matrix}$ |

ب- إعداد المصفوفة $(I-D)^{-1}$ وكما يأتي :

$$I-D=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\frac{1}{4}&\frac{1}{8}&\frac{1}{4}\\0&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{3}{8}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{4}&-\frac{1}{8}&-\frac{1}{4}\\0&\frac{3}{4}&-\frac{1}{4}\\-\frac{3}{8}&-\frac{1}{4}&-\frac{3}{4}\end{bmatrix}$$

$$(I-D)^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{128}{75}&\frac{8}{15}&\frac{56}{75}\\\frac{8}{25}&\frac{8}{5}&\frac{16}{25}\\\frac{24}{25}&\frac{4}{5}&\frac{48}{25}\end{bmatrix}$$

( استخرجت هذه المصفوفة بإحدى الطرق المذكورة في الفصل الرابع )

والآن يمكن إجراء الحسابات المطلوبة :

1- إذا تغير مجموع فقرات الطلب النهائي من كل قطاع من :

$\begin{bmatrix}35\\165\\70\end{bmatrix}$ إلى $\begin{bmatrix}\frac{75}{2}\\180\\75\end{bmatrix}$ وبالعودة إلى العلاقة ( 4-9 ) وهي :

$$X=(I-D)^{-1}F$$

يمكن حساب مستوى الإنتاج الجديد للقطاعات الثلاثة كي تصبح قادرة على تلبية الزيادة الجديدة في الطلب النهائي والزيادة الناجمة عن حاجتها لمستلزمات إنتاج جديدة كي ينتج المستوى المذكور من الإنتاج .

$$\begin{pmatrix} \text{الزراعة} \\ \text{الصناعة} \\ \text{الخدمات} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{128}{75} & \frac{8}{15} & \frac{56}{75} \\ \frac{8}{25} & \frac{8}{5} & \frac{16}{25} \\ \frac{24}{25} & \frac{4}{5} & \frac{48}{25} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{75}{2} \\ 180 \\ 75 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 216 \\ 348 \\ 324 \end{bmatrix}$$

ويظهر أن مستوى الإنتاج الجديد هو :

- القطاع الزراعي **216** بدلا من **200**
- القطاع الصناعي **348** بدلا من **320**
- قطاع الخدمات **324** بدلا من **300**

<u>ملاحظة:</u>

عادة ما نجد جدول بمعاملات المستخدم - المنتج التراكمية مرفقا بجدول المستخدم - المنتج لدى المؤسسات الإحصائية والبحثية ولهذا يمكن الاستعانة به في حساب النتائج أعلاه حيث تتوفر المصفوفة $(I-D)^{-1}$ في الربع الأول منه .

2- إذا تغيرت عناصر الطلب النهائي ويقصد بها هنا الموجه ( Q ) الوارد ذكره في الجدول رقم ( 4-4 ) من [ 35 100 250 ] إلى [ 40 120 300 ] فماذا سيكون عليه مستوى النتاج ؟

وللإجابة على هذا السؤال لابد من وجود الفرضيات التي ذكرناها أعلاه بشان هيكل الجدول ومعاملاته الفنية والظروف التي يعمل في ظلها ، هذا من جهة ومن جهة أخرى فإن تغير عناصر الموجه Q ينعكس بالتغيير على مكونات المصفوفة C وبالتالي عناصر الموجه F وبذلك يسهل علينا تناول F وضربه بمصفوفة ليونتيف للحصول على الناتج المطلوب :

إذن لنبدأ الحل مطبقين العلاقة ( 4-11 ) بهذا الشأن :

$$X = (I-D)^{-1}CQ'$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{128}{75} & \frac{8}{15} & \frac{56}{75} \\ \frac{8}{25} & \frac{8}{5} & \frac{16}{25} \\ \frac{24}{25} & \frac{4}{5} & \frac{48}{25} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & 0 & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{2} & \frac{3}{7} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & \frac{2}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 300 \\ 120 \\ 40 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{128}{75} & \frac{8}{15} & \frac{56}{75} \\ \frac{8}{25} & \frac{8}{5} & \frac{16}{25} \\ \frac{24}{25} & \frac{4}{5} & \frac{48}{25} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{290}{7} \\ \frac{1380}{7} \\ \frac{584}{7} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 238.1 \\ 382.1 \\ 357.7 \end{bmatrix}$$

ويظهر من النتائج أعلاه ما يأتي :

- إن القطاع الزراعي ازداد إنتاجه من **200** إلى **238.1**
- أما القطاع الصناعي فازداد الإنتاج فيه من **320** إلى **382.1**
- وأخيرا زاد إنتاج الخدمات **300** إلى **357.7**

( انتهى الجواب )

<u>ملاحظة :</u>

يمكن في ضوء النتائج المستخلصة من الفقرتين (1،2) في المثال أعلاه بناء جدول جديد للمستخدم المنتج بعد أن حصل التغير في مستوى إنتاج القطاعات النتاجية وذلك بتوزيع المستويات الجديدة للإنتاج والطلب النهائي على عناصر الجدول حسب النسب الموجودة في جدول المعاملات الفنية للمستخدم المنتج . ولتوضيح ذلك دعنا نطلع على

الفصل الرابع

الجدول الذي أنجزه قسم التخطيط والتنبؤ أي الجدول الجديد للمستخدم - المنتج الذي تم بنائه في ضوء مستوى الإنتاج الجديد المبين في الفقرة ( 1 ) من المثال أعلاه حيث أصبح مستوى الإنتـاج [ 324 348 216 ] بدلاً من [ 300 320 200 ] وذلك كالآتي:

جدول رقم ( 4-10 )

| إلى / من | 1 | 2 | 3 | $\sum$ | 5 6 7 | $\sum$ | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 54 | 43.5 | 81 | 178.5 | | 37.5 | 216 |
| 2 | 0 | 87 | 81 (A) | 168 | (B) | 180 | 348 |
| 3 | 81 | 87 | 81 | 249 | | 75 | 324 |
| $\sum$ | 135 | 217.5 | 247 | 295.5 | | | |
| 5 | 27 | 21.75 | 0 | 48.75 | | | |
| 6 | 27 | 43.5 | 40.5 | 111 | | | |
| 7 | 27 | 65.25 | 40.5 (P) | 132.75 | (L) | (R) | (Z) |
| $\sum$ | 81 | 130.5 | 81 | 292.5 | | | |
| $\sum$ | 216 | 348 | 324 (X) | 888 | (Q) | | |

لقد اكتمل الجدول ما عدا المصفوفات ( B,L ) والتي يمكن ملؤها إذا توفرت معلومات كافيـة عـن توزيع المستوى الجديد لموجـة الطلـب النهـائي المعطـى أصـلا وذلـك بتوزيعـه عـلى عنـاصره الموجـودة في المصفوفة B . وعند ذلك يمكن ملأ المصفوفة ( B ) الفارغة في الجدول . وبافتراض آن مكونـات المـصفوفة L تبقى ثابتة في الجدول المقدم حيث إنها مكونات تتأتى مـن عنـاصر الإنتـاج والاسـتيراد المتجهـة مبـاشرة إلى الطلب النهائي ولا تدخل في الصناعة وان الزيادة في الطلب النهائي المذكورة في المثال تجرى تلبيتها من قبـل القطاعات الإنتاجية (الزراعة والصناعة والخـدمات) لـيس مـن عنـاصر الإنتـاج و الاسـتيرادات . إذن يمكـن افتراض بقـاء مكونـات المـصفوفة ( L ) عـلى مـا هـي عليـه في الجـدول المقـدم . وبـذلك يمكـن اسـتكمال المصفوفات المتبقية والحصول على جـدول جديـد للمـستخدم المنتج بعـد حـساب تـأثيرات تغـير مـستوى الطلب النهائي :

من $\begin{bmatrix}35\\165\\70\end{bmatrix}$ إلى $\begin{bmatrix}37.5\\180\\75\end{bmatrix}$

أما بناء جدول جديد إذا كان التغير في عناصر الطلب النهائي معطاة حسب الموجه Q فإن الموضوع يكون يسيرا دون اللجوء إلى الافتراض الوارد في الفقرة أعلاه لان وجود الموجه Q يساعد على حساب مكونات المصفوفتين B,L أيضا وان مستوى الإنتاج الجديد X يساعد على حساب بقية المصفوفات ونعني بها A,P ومن ثم يصبح الجدول الجديد محسوبا بالكامل في ضوء التغير في الموجه Q .

<u>مثال(2):</u>

الجدول التالي هو جدول المعاملات التراكمية للمستخدم - المنتج :

جدول رقم ( 4-11 )

| | الصناعات 1 2 | | الصادرات 4 | الاستثمار 5 | الاستهلاك 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 | $\frac{7}{5}$ | $\frac{6}{5}$ | $\frac{7}{5}$ |
| 2 | 1 | $\frac{3}{2}$ | $\frac{13}{10}$ | $\frac{7}{5}$ | $\frac{13}{10}$ |
| $P_1$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{13}{40}$ | $\frac{7}{20}$ | $\frac{23}{40}$ |
| $P_2$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{5}{8}$ | $\frac{27}{40}$ | $\frac{13}{20}$ | $\frac{27}{40}$ |

المطلوب إيجاد ما يأتي :

1- إعادة تكوين جدول المعاملات الفنية الذي حسبت على أساس المعاملات التراكمية .

2- إذا كان الطلب النهائي $\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 30 \end{bmatrix}$ فما مقدار الإنتاج النهائي للقطاعين $x_1$ , $x_2$ الذي يفي بمتطلبات التشابك القطاعي الوارد في الجدول .

3- إذا كان الطلب النهائي حسب العناصر ( الاستهلاك والاستثمار والصادرات ) أي عناصر الموجة Q هي ( 10 , 15 , 20 ) على التوالي احسب مستوى الإنتاج في القطاعات الإنتاجية وكون جدول المستخدم المنتج في ضوء هذه المعاملات .

4- إذا زاد الاستهلاك من ( 10) إلى ( 40 ) احسب مقدار الإنتاج في كلا القطاعين ومقدار المستخدمات الأولية ( $p_1$ , $p_2$ ) اللازمة لمواجهة التغير الجديد في الإنتاج.

الجواب :

(1) نحسب أولا ما يأتي :

$$(I-D) = \left[(I-D)^{-1}\right]^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = I-(I-D) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

إذن حصلنا على المصفوفة ( D ) والآن نبحث عن المصفوفة ( U ) كالآتي:

لدينا من جدول المعاملات التراكمية :

$$U(I-D)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{8} \end{bmatrix}$$

ولما كان :

$$\therefore\ U = U(I-D)^{-1}(I-D)$$ (خصائص المصفوفات)

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

وهكذا أصبحت لدينا المصفوفة ( U ) من مصفوفات المعاملات الفنية ودعنا الآن نبحث عن المصفوفة ( C ) :

لدينا من الجدول المعطى ما يأتي :

$$(I-D)^{-1}C = \begin{bmatrix} \frac{7}{5} & \frac{6}{5} & \frac{7}{5} \\ \frac{13}{10} & \frac{7}{5} & \frac{13}{10} \end{bmatrix}$$

وحيث أن : $C = (I-D)(I-D)^{-1}C$ (خصائص المصفوفات)

$$= \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{7}{5} & \frac{6}{5} & \frac{7}{5} \\ \frac{13}{10} & \frac{7}{5} & \frac{13}{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

وبذلك توفرت لجدول المعاملات الفنية المصفوفة C .

وأخيرا تبقت المصفوفة H ولنبدأ الآن بالبحث عنها .

لدينا من جدول المعاملات التراكمية ما يلي :

$$U(I-D)^{-1}C + H = \begin{bmatrix} \frac{13}{40} & \frac{7}{20} & \frac{13}{40} \\ \frac{27}{40} & \frac{13}{20} & \frac{27}{40} \end{bmatrix}$$

ولما كان :

$$\therefore H = \left[U(I-D)^{-1}C + H\right] - \left[U(I-D)^{-1}C\right]$$

ولكن قبل الشروع باستخراج ( H ) من المعادلة أعلاه نحتاج لاستخراج قيمة المصفوفة المطروحة

وهي :

$$\left[U(I-D)^{-1}C\right]$$

لدينا :

$$U(I-D)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{8} \end{bmatrix}$$

ولدينا من النتائج أعلاه :

$$C = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

$$\therefore U(I-D)^{-1}C = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{13}{40} & \frac{7}{40} & \frac{13}{40} \\ \frac{27}{40} & \frac{13}{20} & \frac{27}{40} \end{bmatrix}$$

ومن النتائج أعلاه نحصل على :

$$H=\begin{bmatrix}\frac{13}{40} & \frac{7}{20} & \frac{13}{40}\\ \frac{27}{40} & \frac{13}{20} & \frac{27}{40}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\frac{13}{40} & \frac{7}{20} & \frac{13}{40}\\ \frac{27}{40} & \frac{13}{20} & \frac{27}{40}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

وأخيرا أصبحت المصفوفة **H** متيسرة لدينا وبالمستطاع الآن بناء جدول المعاملات الفنية وكما يأتي :

جدول رقم ( 4-12 )

جدول المعاملات الفنية

| | 1 | 2 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{2}{5}$ |
| | (D) | | | (C) | |
| 2 | $\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{3}{5}$ | $\frac{4}{5}$ | $\frac{3}{5}$ |
| 3 | 0 (U) | $\frac{1}{4}$ | 0 | 0 (H) | 0 |
| 4 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | 0 | 0 | 0 |

(2) إذا كان : $\begin{bmatrix}f_1\\ f_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}20\\ 30\end{bmatrix}$ فإن مستوى الإنتاج النهائي الذي يفي بمتطلبات التشابك الوارد في الجدول هو :

من العلاقة ( 4-9 ) $X=(I-D)^{-1}F$

$$\therefore\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & \frac{3}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}20\\ 30\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}80\\ 60\end{bmatrix}$$

الفصل الرابع

أي أن مستوى إنتاج القطاع الزراعي ( 80 ) والقطاع الصناعي ( 60 ) .

(3) إذا كان [ 10 15 20] = Q فما هو مستوى الإنتاج في القطاعين الزراعي والصناعي؟ ضع جدولا جديدا للمستخدم المنتج في ضوء مستوى الإنتاج والمستخرج.

الجواب :

من العلاقة ( 4-11 ) لدينا :

$$X = (I - D)^{-1} C Q'$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{5} & \frac{6}{5} & \frac{7}{5} \\ \frac{13}{10} & \frac{7}{5} & \frac{13}{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 15 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \\ 60 \end{bmatrix}$$

إذن يكون مستوى الإنتاج الزراعي ( 60 ) والإنتاج الصناعي ( 60 ) أيضاً.

أما جدول المستخدم والمنتج الذي يمكن استخراجه في ضوء الموجه Q والموجه المستخرج X فهو كالآتي:

الجدول رقم ( 4-13 )

| | من \ إلى | 1 | 2 | 3 $\sum$ | 4 | 5 | 6 | 7 $\sum$ | 8 الإنتاج |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 15 | 30 | 45 | 8 | 3 | 4 | 15 | 60 |
| | 2 | 30 | 0 | 30 | 12 | 12 | 6 | 30 | 60 |
| | 3 $\sum$ | 45 | 30 | 75 | 20 | 15 | 10 | 45 | 120 |
| P1 | 4 | 0 | 15 | 15 | 0 | 0 | 0 | 0 | 15 |
| P2 | 5 | 15 | 15 | 30 | 0 | 0 | 0 | 0 | 30 |
| | 6 $\sum$ | 15 | 30 | 45 | 0 | 0 | 0 | 0 | 45 |
| | 7 الإنتاج | 60 | 60 | 120 | 20 | 15 | 10 | 45 | - |

(4) عندما يزداد مستوى الاستهلاك من ( 20 ) إلى ( 40 ) فإن الذي يحصل لمستوى الإنتاج ومستوى المستخدمات الأولية $(M_1, M_2)$ هو الآتي :

أ- يكون مستوى الإنتاج الجديد إذا ارتفع مستوى الاستهلاك من ( 20 ) إلى (40) كالآتي:

من العلاقة $X = (I - D)^{-1} CQ'$ ( 4-11 )

$$\therefore \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{5} & \frac{6}{5} & \frac{7}{5} \\ \frac{13}{10} & \frac{7}{5} & \frac{13}{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 15 \\ 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 102 \\ 99 \end{bmatrix}$$

ب- أما التغيرات في المستخدمات ( $P_1$ , $P_2$ ) فهي مع الملاحظة أن H=0 :

لدينا :

$$\therefore Z = [U(I - D)^{-1} C + H]Q'$$

$$\therefore Z = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{13}{40} & \frac{7}{20} & \frac{13}{40} \\ \frac{27}{40} & \frac{13}{20} & \frac{27}{40} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 15 \\ 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24.75 \\ 50.25 \end{bmatrix}$$

ويمكن استخراج قيمة ( $P_1$ ,$P_2$ ) عن طريق العلاقة الآتية :

$$Z = UX + R$$

وحيث أن $R = [0]$

$$\therefore Z = UX$$

$$Z = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 102 \\ 99 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24.75 \\ 50.25 \end{bmatrix}$$

( انتهى الجواب )

مثال(3):

إذا ارتفع الطلب النهائي على الإنتاج الزراعي بوحدة واحدة في الجدول المستخدم - المنتج ( 4-13 ) بين التأثيرات التي تنشأ عن هذا الارتفاع وعلق على النتائج مستندا في التحليل على المعاملات التراكمية والمعاملات الفنية التي وردت في المثال السابق .

الجواب :

لدينا :

$$X = (I - D)^{-1} F$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 \\ 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 62 \\ 61 \end{bmatrix}$$

لاحظ إننا استخدمنا هنا $(I - D)^{-1}$ وهي جاهزة من جدول المعاملات الفنية ومن ذلك يتضح أن التأثيرات الأولية لزيادة الطلب النهائي على الإنتاج الزراعي بوحدة واحدة أدى إلى زيادة في إنتاج القطاع الزراعي بمقدار ( 2 ) وحدة والإنتاج الصناعي بمقدار ( 1) وحدة ولكي نتبين التأثيرات بكاملها دعنا نكون جدول بالمستخدم - المنتج في ضوء النتائج المستحصلة:

جدول ( 4-14 )

| إلى / من | 1 | 2 | $\sum$ | 4 | 5 | 6 | $\sum$ | الإنتاج |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 15.25 | 30.5 | 46 | B | | | 16 | 62 |
| 2 | 31 | 0 | 31 | | | | 30 | 61 |
| $\sum$ | 46.5 | 30.5 | 77 | | | | 46 | 123 |
| P1 | 0 | 15.25 | 15.25 | 0 | 0 | 0 | 0 | 15.25 |
| P2 | 15.5 | 15.25 | 30.75 | 0 | 0 | 0 | 0 | 30.75 |
| $\sum$ | 15.5 | 30.5 | 46 | 0 | 0 | 0 | 0 | 46 |
| الإنتاج | 62 | 61 | 123 | Q | | | 46 | |

ويظهر من الجدول أن الزيادة في الطلب النهائي بمقدار وحدة واحدة نجم عنه تأثيرات تفصيلية أخرى غير الزيادة النهائية . إن هذه التأثيرات يمكن تعقبها استنادا إلى المؤشرات الموجودة في جدول المعاملات التراكمية والمعاملات الفنية التي وردت في المثال رقم ( 2 ) وكما يأتي :

أ- أن زيادة الطلب النهائي بوحدة واحدة من الإنتاج الزراعي يتطلب : قيام القطاع الزراعي بزيادة إنتاجه بمقدار ( 2 ) وحدة وقيام القطاع الصناعي بزيادة إنتاجه بمقدار ( 1 ) وحدة . إضافة إلى زيادة المستخدمات التي تدخل كعوامل أولية في العملية الإنتاجية بمقدار ( $\frac{1}{4}$ ) وحدة من $P_1$ و( $\frac{3}{4}$ ) وحدة من ( P2 ) .

ب- وبالعودة إلى جدول المعاملات الفنية نلاحظ أن الزيادة التي حدثت في ( أ ) أعلاه جرى توزيعها حسب المعاملات الفنية كما مبين في جدول المستخدم - المنتج للمبين في أعلاه : حيث وزعت الزيادة في إنتاج القطاع الزراعي على القطاع نفسه ( 0.5 ) وحدة والقطاع الصناعي ( 0.5 ) وحدة والطلب النهائي ( 1 ) وحدة أي ( 2 ) وحدة .

أما الزيادة في القطاع الصناعي فقد استلمها القطاع الزراعي كمستخدمات بكاملها ولم يذهب منها شيء للقطاع أو للطلب النهائي .

ج- أما المستخدمات الأولية فإن الزيادة البالغة ( $\frac{1}{4}$ ) وحدة من $M_1$ ذهبت بالكامل إلى القطاع الصناعي ولم يستلم منها شيء القطاع الزراعي . في حين وزعت الزيادة في ($P_2$) البالغة ( $\frac{3}{4}$ ) الوحدة بين القطاعين فاستلم القطاع الزراعي (0.5) وحدة والصناعي ( 0.25 ) وحدة .

د- وأخيراً يلاحظ أن الزيادة التي حدثت في الإنتاج النهائي للقطاع الصناعي بمقدار ( 1) وحدة قد استخدمها القطاع الزراعي بكاملها كي يستطيع النهوض بأعبائه

الإنتاجية الجديدة وفي نفس الوقت اضطر القطاع الصناعي كي ينتج وحدة واحدة إضافية إلى زيادة مستخدماته الأولية بمقدار ( 0.25 ) وحدة استلمها من $P_2$ و ( 0.25 ) وحدة استلمها من $P_1$ إضافة إلى استخدامه (0.5 ) وحدة من الإنتاج الزراعي .ليبلغ مجموع ما استخدمه (1) وحدة إضافية وهو ما يساوي مجموع الزيادة في إنتاجه.

مثال(4):

لو ارتفع الاستهلاك بوحدة واحدة في المثال السابق فأصبح Q كالآتي : [ 21 , 15 , 10 ] وان الزيادة توزعت حسب جدول المعاملات الفنية على الاستهلاك من السلع الزراعية بمقدار ( 0.4 ) وحدة ومن السلع الصناعية بمقدار ( 0.6) وحدة .

وضح التأثيرات التي تتركها هذه الزيادة على مكونات جدول المستخدم - المنتج.

الجواب :

أ- التغيرات على مستوى الإنتاج :

$$X = (I - D)^{-1} F$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15.4 \\ 30.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 61.4 \\ 61.3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{5} & \frac{6}{5} & \frac{7}{5} \\ \frac{13}{10} & \frac{7}{5} & \frac{13}{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 15 \\ 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 61.4 \\ 61.3 \end{bmatrix}$$

أما تأثير الزيادة على المستخدمات الأولية فهي :

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{13}{40} & \frac{7}{20} & \frac{13}{40} \\ \frac{27}{40} & \frac{13}{20} & \frac{27}{40} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 15 \\ 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15.325 \\ 30.675 \end{bmatrix}$$

ويمكن استخراج هذه المؤشرات مباشرة من تفاعل المعاملات الفنية مع مستوى الإنتاج الجديد والجدول الآتي يبين التغيرات التي طرأت على مكونات المستخدمات والإنتاج :

جدول رقم ( 4-15 )

| من \ إلى | 1 | 2 | $\sum$ | 4 | 5 | 6 | $\sum$ | الإنتاج |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 15.35 | 30.65 | 46 | 4 | 3 | 8.4 | 15.4 | 61.4 |
| 2 | 30.7 | 0 | 30.7 | 6 | 12 | 12.6 | 30.6 | 61.3 |
| $\sum$ | 46.05 | 30.65 | 76.7 | 10 | 15 | 21 | 46 | 122.7 |
| 4 | 0 | 15.325 | 15. 325 | 0 | 0 | 0 | 0 | 15.325 |
| 5 | 15.35 | 15.325 | 30.675 | 0 | 0 | 0 | 0 | 30.675 |
| $\sum$ | 15.35 | 30.65 | 46 | 0 | 0 | 0 | 0 | 46 |
| الإنتاج | 61.4 | 61.3 | 122.7 | 10 | 15 | 21 | 46 | - |

ويلاحظ أن الزيادة هنا حصلت في الطلب النهائي على منتجات القطاعين معا وكانت بمقدار ( 0.4 ) وحدة على منتجات القطاع الزراعي و ( 0.6 ) وحدة على منتجات القطاع الصناعي ، كما تظهره التأثيرات المبينة في الجدول أعلاه ، ولمتابعة هذه التغيرات مقارنة بما يحمله جدول المعاملات التراكمية وجدول المعاملات الفنية من معان نحاول أن نتعقب التغيرات التي تعكسها كل زيادة على منتجات القطاعين كل على انفراد ولنبدأ كما يأتي :

1- إذا زاد الطلب النهائي على الإنتاج الزراعي بمقدار ( 0.4 ) وحدة فقط دون أن يزداد الطلب المذكور على الإنتاج الصناعي فماذا يحدث في مستوى الإنتاج ؟

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15.4 \\ 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60.8 \\ 60.4 \end{bmatrix}$$

أي أن مستوى الإنتاج يزداد من [60 , 60 ] إلى [ 60.4 , 60.8 ] .

وتبعا للمعاملات التراكمية فإن :

أ- القطاع الزراعي لا بد وان ينتج ( المعامل التراكمي × الزيادة في الطلب النهائي = [ 2x0.4=0.8 ] ) وهو كما مبين أعلاه وان هذه الزيادة كي تنجز لا بد للقطاع الزراعي أن يستلم مستخدمات وعوامل وسيطة كالآتي :

- من القطاع نفسه $\frac{1}{4} \times 0.8 = 0.2$ وحدة
- من القطاع الصناعي $\frac{1}{2} \times 0.8 = 0.4$ وحدة
- مستخدمات من $P_1$ = $0$ وحدة
- مستخدمات من $P_2$ $\frac{1}{4} \times 0.8 = 0.2$ وحدة
- مجموع المستخدمات $0.8$ وحدة

كما وقام القطاع الزراعي بتوزيع هذه الزيادة على أقسام الجدول كما يأتي :

- من القطاع نفسه $\frac{1}{4} \times 0.8 = 0.2$ وحدة
- من القطاع الصناعي $\frac{1}{2} \times 0.8 = 0.2$ وحدة
- للصادرات $0$ وحدة
- للاستثمار $0$ وحدة
- للاستهلاك : $0.4$ وحدة
- مجموع المنتج : = $0.8$ وحدة

ب- أما القطاع الصناعي كي يلبي الزيادة التي حدثت في القطاع الزراعي قام بزيادة إنتاجه بمقدار ( 0.4 ) ولأجل إنتاج هذه الكمية استلم مستخدمات مقدارها :

| |
|---|
| • من القطاع الزراعي $0.4\times\frac{1}{2}=0.2$ وحدة |
| • من القطاع نفسه 0 = 0.4×0 وحدة |
| • مستخدمات من $P_1$ $0.4\times\frac{1}{4}=0.1$ وحدة |
| • مستخدمات من $P_2$ $0.4\times\frac{1}{4}=0.1$ وحدة |
| • مجموع المستخدمات $0.4$= وحدة |

وقام القطاع بتوزيع هذه الزيادة على أقسام الجدول حسبما يلي :

| |
|---|
| • من القطاع الزراعي $\frac{1}{4}\times0.8=0.2$ وحدة |
| • والقطاع الصناعي $\frac{1}{2}\times0.4=0.2$ وحدة |
| • للصادرات $0$ وحدة |
| • للاستثمار $0$ وحدة |
| • للاستهلاك : 0 وحدة |
| • مجموع المنتج : = $0.4$ وحدة |

2- إذا زاد الطلب النهائي على المنتجات الصناعية بمقدار ( 0.6 ) وحدة فقط دون أن تحدث زيادة في الطلب على المنتجات الزراعية فماذا سيحدث :

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15 \\ 30.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60.6 \\ 60.9 \end{bmatrix}$$

أي أن مستوى الإنتاج ازداد ليكون [ 60.9 , 60.6 ] بدلاً من [60, 60 ] .

وإذا ما نظر إلى الزيادة في الإنتاج الصناعي من زاوية المعاملات التراكمية فإن الزيادة مقدارها ( 0.6 ) في الطلب النهائي تستلزم من القطاع أن يزيد إنتاجه بمقدار :

المعامل التراكمي × الزيادة في الطلب النهائي ( $\frac{3}{2} \times 0.6 = 0.9$ ) وهي الزيادة التي ظهرت في أعلاه كما أن الزيادة في الطلب النهائي على الإنتاج الصناعي تطلبت زيادة في الإنتاج الزراعي بمقدار ( **0.6** ) وحدة .

وقد استلم القطاعان مستلزمات إنتاج لتلبية الزيادة في الإنتاج وقاما بتوزيع إنتاجهما على أقسام الجدول بنفس الأسلوب الموضح أعلاه.

3- وعند جمع الزيادتين في الإنتاج المبينتين في (1،2) نحصل على نفس النتيجة التي ظهرت في المثال رقم (3) أي أن :

$$\begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 60 \\ 60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 61.4 \\ 61.3 \end{bmatrix}$$

## 4-7 جدول المستخدم - المنتج والبرمجة الخطية

سبق وان ذكرنا بان من جملة الافتراضات التي يستند أليها جدول المستخدم - المنتج هو عمل القطاعات الاقتصادية تحت ظل دالة إنتاج خطية (متجانسة من الدرجة الأولى). وفي ضوء هذا الافتراض الذي يعني سيادة العلاقات الخطية بين متغيرات جدول المستخدم - المنتج المكونة لفروع الاقتصاد الوطني بالإضافة إلى الافتراضات الأخرى يمكننا بناء نموذج خطي من العلاقات التي تعكس التشابك الوارد في الجدول.

لنأخذ الجدول الافتراضي الأتي :

**جدول رقم (4-16)**

جدول المستخدم - المنتج

| من \ إلى | 1 | 2 | $\sum$ | 4 $C$ | 5 $I_1$ | 6 $I_2$ | 7 $S$ | $\sum$ | الإنتاج |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 25 | 20 | 45 | 4 | 5 | 15 | 6 | 30 | 75 |
| 2 | 10 | 20 | 40 | 16 | 20 | 10 | 24 | 70 | 110 |
| $\sum$ | 35 | 50 | 85 | 20 | 25 | 25 | 30 | 100 | 185 |

| من \ إلى | 1 2 | $\Sigma$ | 4 5 6 7 <br> $C$ $I_1$ $I_2$ $S$ | $\Sigma$ | الإنتاج |
|---|---|---|---|---|---|
| 4-العمل <br> 5-رأس المال | 15 30 <br> 25 30 | 45 <br> 55 | 0 0 0 0 <br> 0 0 0 0 | 0 <br> 0 | 45 <br> 55 |
| $\Sigma$ | 40 60 | 100 | 0 0 0 0 | 0 | 100 |
| الإنتاج | 75 110 | 185 | 20 25 25 30 | 100 | |

حيث أن : $C, I_1, I_2, S$ تمثل الاستهلاك والاستثمار الأول والاستثمار الثاني والمخزون على التوالي.

وبعد حساب المعاملات الفنية نحصل على الجدول (4-17) الآتي :

جدول رقم (4-17)

| | 1 2 | 4 5 6 7 |
|---|---|---|
| 1 | $\frac{1}{3}$ $\frac{2}{11}$ | $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{1}{5}$ |
| 2 | $\frac{2}{15}$ $\frac{3}{11}$ | $\frac{4}{5}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{4}{5}$ |
| 4 | $\frac{1}{5}$ $\frac{3}{11}$ | 0 0 0 0 |
| 5 | $\frac{1}{3}$ $\frac{3}{11}$ | 0 0 0 0 |
| $\Sigma$ | 1 1 | 1 1 1 1 |

ولدينا :

4- العمل
5-رأس المال

$$X = DX + F$$

$$\therefore (I - D)X = F \qquad (4-8)$$

ولما كان :

$$(I-D)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{11}\\ \frac{2}{15} & \frac{3}{11}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{2}{11}\\ -\frac{2}{15} & \frac{8}{11}\end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{2}{11}\\ -\frac{2}{15} & \frac{8}{11}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}30\\ 70\end{bmatrix}$$

وبإجراء عمليات الضرب ينتج :

$$(4-16)\qquad \frac{2}{3}x_1-\frac{2}{11}x_2=30$$

$$(4-17)\qquad -\frac{2}{15}x_1+\frac{8}{11}x_2=70$$

ولدينا كذلك من العلاقة **(4-12)** :

$$Z=UX+R$$

ولما كانت **R** من الجدول **(4-16)** تساوي صفراً أي أن : **R = [ 0 ]**

$$\therefore Z=UX$$

ومن جدول العلامات الفنية وجدول المستخدم - المنتج أعلاه نحصل على :

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{5} & \frac{3}{11}\\ \frac{1}{3} & \frac{3}{11}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}45\\ 55\end{bmatrix}$$

وبإجراء عمليات الضرب ينتج :

$$\frac{1}{5}x_1 + \frac{3}{11}x_2 = 45 \qquad (4-18)$$

$$\frac{1}{3}x_1 + \frac{3}{11}x_2 = 55 \qquad (4-19)$$

وحيث أن : $F = CQ'$ من العلاقة (4-10)

$$\therefore (I-D)X = F = CQ'$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{11} \\ -\frac{2}{5} & \frac{8}{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{4}{5} & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ I_1 \\ I_2 \\ S \end{bmatrix}$$

إذن:

$$\frac{2}{3}x_1 - \frac{2}{11}x_2 = \frac{1}{5}C + \frac{1}{5}I_1 + \frac{3}{5}I_2 + \frac{1}{5}S \qquad (4-20)$$

$$-\frac{2}{5}x_2 + \frac{8}{11}x_2 = \frac{4}{5}C + \frac{4}{5}I_1 + \frac{2}{5}I_2 + \frac{4}{5}S \qquad (4-21)$$

وحيث أن كل مفردة من مكونات الطلب النهائي لا يمكن أن تكون سالبة أذن يمكن صياغة ما يأتي من العلاقتين (4-21) ، (4-20) :

$$\frac{2}{3}x_1 \geq \frac{2}{11}x_2 \qquad (4-22)$$

$$\frac{8}{11}x_2 \geq \frac{2}{5}x_1 \qquad (4-23)$$

ويلاحظ أن العلاقتين (4-23) و (4-22) لا تعطي قيوداً متماسكة لأنه إذا كان الطرف الأيمن على سبيل المثال في العلاقة (4-22) مساوياً للطرف الأيسر أي أن :

$$\frac{2}{3}x_1 = \frac{2}{11}x_2$$

فهذا يعني عند العودة للعلاقة (4-20) يكون :

$$\frac{1}{5}C + \frac{1}{5}I_1 + \frac{3}{5}I_2 + \frac{2}{5}S = 0$$

ويترتب على ذلك أن لا إنتاج لإغراض الطلب النهائي من كلا القطاعين أي أن قيم عناصر المصفوفة (B) تصبح صفراً فلا استهلاك حكومي ولا استثمار ولا صادرات ولا استهلاك خاص وهذا غير ممكن. لذلك إذا أريد تغيير العلاقتين (4-23) و (4-22) بحيث لا يحدث ما ذكرناه أعلاه لابد من البحث عن العلاقة التي تعطينا أدنى مستوى من ($x_1$) و أعلى مستوى من ($x_2$) كالآتي :

إذا حذفنا موجة الاستثمار في القطاع (2) والذي رمزنا له ب ($I_2$) لكونه يحتوي على أعلى مفردة طلب نهائي منتجة من قبل القطاع (1) لغرض الاستثمار في القطاع الاستثماري (2) ومقدارها (15) المبينة في الجدول ، وذلك بطرح العلاقة (4-20) من العلاقة (4-21) مضروبة $\frac{3}{2}$ لنحصل على :

$$-\frac{3}{5}x_1 + \frac{12}{11}x_2 = \frac{6}{5}C + \frac{6}{5}I_1 + \frac{3}{5}I_2 + \frac{6}{5}S$$

$$-\frac{2}{3}x_1 + \frac{2}{11}x_2 = -\frac{1}{5}C - \frac{1}{5}I_1 - \frac{3}{5}I_2 - \frac{1}{5}S$$

وبالجمع ينتج :

$$-\frac{19}{15}x_1 + \frac{14}{11}x_2 = C + I_1 + S \qquad (4-24)$$

وحيث أن :

الجزء الأول

$$C \geq 0 \quad , I_1 \geq 0 , S \geq 0$$

فإن :

$$\frac{14}{11}x_2 \geq \frac{19}{15}x_2 \qquad (4-25)$$

وبنفس الطريقة إذا حذفنا الموجة ($I_1$) لكونه يحتوي على أعلى مفردة طلب نهائي مجهزة من قبل القطاع (2) لغرض الاستثمار في القطاع الاستثماري (1) وكما تظهر في الجدول بمقدار (20) وذلك بطرح العلاقة (4-21) من العلاقة (4-20) مضروبة ب (4) لنحصل على :

$$\frac{8}{3}x_1 - \frac{8}{11}x_2 = \frac{4}{5}C + \frac{4}{5}I_1 + \frac{12}{5}I_2 + \frac{4}{5}S$$

$$\frac{2}{5}x_1 - \frac{8}{11}x_2 = -\frac{4}{5}C - \frac{4}{5}I_1 - \frac{2}{5}I_2 - \frac{4}{5}S$$



وبالجمع ينتج :

$$\frac{23}{15}x_1 - \frac{8}{11}x_2 = I_2 \qquad (4-26)$$

وحيث أن : $I_2 \geq 0$

$$\therefore \frac{23}{15}x_1 \geq \frac{8}{11}x_2 \qquad (4-27)$$

والآن لو افترضنا بان الإمكانيات الإنتاجية للقطاع (1) والقطاع (2) قدرت لفترة قادمة بمقدار (80,120) على التوالي. أي أن المخطط من خلال ما متوفر له من معاملات فنية في الجدول الحالي أخذا بنظر الاعتبار القيود المذكورة أعلاه للوصول بالإنتاج إلى (80,120) في القطاعين على التوالي.فوضع توقعات الإنتاج بالصيغة الآتية :

$$x_1 \le 80$$

$$x_2 \le 120$$

وعند تجميع المتباينات النموذج الخطي التي حصلنا عليها يبدو لنا النموذج الخطي الآتي :

$$\frac{2}{3}x_1 \ge \frac{2}{11}x_2$$ العلاقة (4-22)

$$\frac{8}{11}x_2 \ge \frac{2}{5}x_1$$ العلاقة (4-23)

$$\frac{14}{11}x_2 \ge \frac{19}{15}x_1$$ العلاقة (4-25)

$$\frac{23}{15}x_1 \ge \frac{8}{11}x_2$$ العلاقة (4-27)

$$\frac{1}{5}x_1 + \frac{3}{11}x_2 \le 45$$ العلاقة (4-18)

$$\frac{1}{3}x_1 + \frac{3}{11}x_2 \le 55$$

$$x_1 \le 80$$

$$x_2 \le 120$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$ (4-19)

وبالإمكان إعادة صياغة النموذج ليأخذ الشكل العام للبرنامج الخطي بافتراض إن دالة الهدف هي تحقيق أعلى إنتاج من $X_1, X_2$ في ظل حالة التوازن أي أن دالة الهدف هي: $Z = X_1 + X_2$ وبـذلك يأخذ البرنامج الصيغة الآتية :

$$\max z = x_1 + x_2$$

$$subject \quad to$$

$$\frac{2}{3}x_1 - \frac{2}{11}x_2 \geq 0$$

$$\frac{2}{5}x_1 - \frac{8}{11}x_2 \leq 0$$

$$\frac{23}{15}x_1 - \frac{8}{11}x_2 \geq 0$$

$$\frac{19}{15}x_1 - \frac{14}{11}x_2 \leq 0$$

$$\frac{1}{5}x_1 + \frac{3}{11}x_2 \leq 45$$

$$\frac{1}{3}x_1 + \frac{3}{11}x_2 \leq 55$$

$$x_1 \leq 80$$

$$x_2 \leq 120$$

$$x_1 \geq 0$$

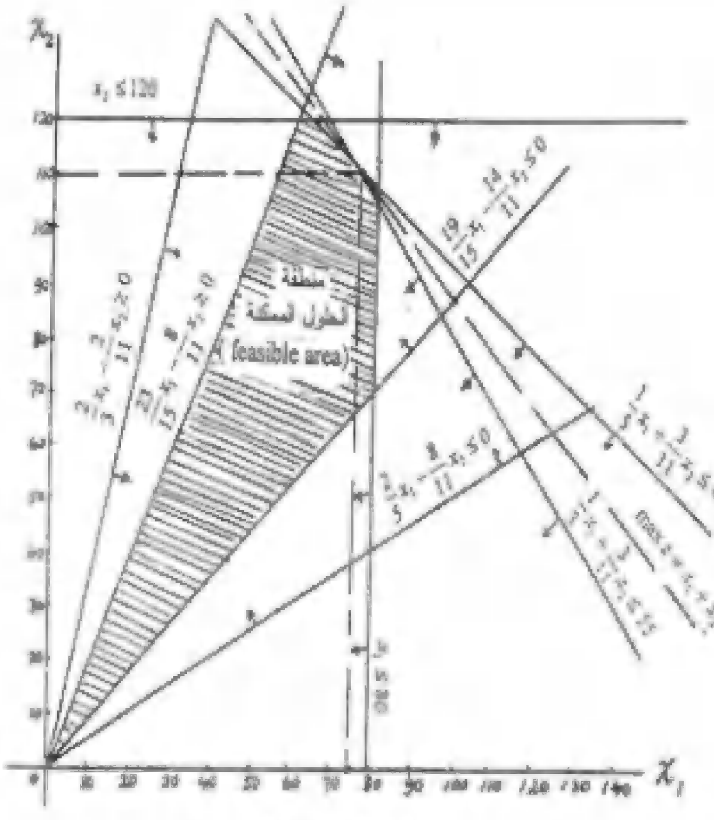
$$x_2 \geq 0$$

ويلاحظ أن أشارة بعض المتباينات عند إعادة الصياغة قد أصبحت عكس الإشـارة التي كانت في الصيغة السابقة وقد أملت ذلك الحاجة إلى ترتيب وضع المتغـيرين $x_1, x_2$

الفصل

الرابع

ليكونا في حالة منسقة مع العلم أن تبدل الإشارة لم يغير في مكونات العلاقة ونتائجها من الناحية الرياضية. ويمكن حل هذا النموذج بهدف تحديد منطقة الحلول الممكنة (feasible area) بطريقة الرسم البياني وذلك لوجود متغيرين فقط هما $X_1$ ، $X_2$ .والشكل البياني(4-1) يوضح منطقة الحلول الممكنة والتي سنأتي على شرحها من الناحية المفاهيمية والعملية في الفصل الخامس .




شكل رقم (4-1)

## 4-8 جدول المستخدم -المنتج والحسابات القومية

تعتبر العلاقة بين جدول المستخدم - المنتج والحسابات الإجمالية في الاقتصاد القومي علاقة وطيدة ومتبادلة ويمكن بيان مدى قوة هذه العلاقة وأهميتها بتناول جدول بسيط للمستخدم - المنتج يحتوي على ثلاثة قطاعات هي الزراعة والصناعة والخدمات ودعنا نسميها (1)،(2)،(3) على التوالي لسهولة الإشارة أليها عند مناقشة الموضوع.

إن ما تجدر الإشارة إليه أن حسابات الدخل القومي والناتج القومي تجري بثلاث طرق :

وهي طريقة الإنتاج وطريقة الإنفاق وطريقة الدخل وسنأتي على شرحها ضمن استعراض العلاقة بين جدول المستخدم - المنتج والحسابات القومية ولابد لنا من البدء بجدول إيضاحي للمستخدم - المنتج قبل الشروع في تباين هذه العلاقة أذن لنأخذ الجدول الأتي :

جدول المستخدم - المنتج (4-18)

| إلى / من | 1 | 2 | 3 | $\sum^{4}$ | 5 C | 6 G | 7 I | 8 S | 9 E | $\sum^{10}$ | الإنتاج 4+10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1- الزراعة | 50 | 90 | 70 | 210 | 120 | 25 | 5 | – | 40 | 190 | 400 |
| 2- الصناعة | 30 | 60 | 80 | 170 | 70 | 15 | 30 | –5 | 220 | 230 | 500 |
| 3- الخدمات | 10 | 50 | 5 | 65 | 130 | 15 | 40 | 10 | – | 195 | 260 |
| 4- $\sum$ | 90 | 200 | 155 | 445 | 320 | 55 | 75 | 5 | 260 | 715 | 1160 |
| 5- M | 50 | 150 | 20 | 220 | 200 | 85 | 90 | 5 | - | 380 | 600 |
| 6- W | 125 | 90 | 40 | 255 | 25 | 150 | - | - | - | 175 | 430 |
| 7- R | 15 | 5 | 0 | 20 | 20 | 5 | - | - | - | 25 | 45 |
| 8- P | 70 | 40 | 40 | 150 | - | - | - | - | - | – | 150 |
| 9- D | 5 | 15 | 50 | 70 | - | - | - | - | - | – | 70 |
| 10 $\sum$ | 310 | 300 | 105 | 715 | 245 | 240 | 90 | 5 | - | 580 | 1295 |
| 11- الإنتاج 4+10 | 400 | 500 | 260 | 1660 | 565 | 295 | 165 | 10 | 260 | 1295 | |

قبل الدخول في الموضوع دعنا نسمي الرموز المستعملة :

C = الاستهلاك العائلي ( الخاص) من ضمنه ما تشتريه العوائل من خدمات عوامل الإنتاج ( الأجور والإيجارات ).

G = الإنفاق الحكومي الجاري من ضمنه ما تشتريه الحكومة من المهن المختلفة أو مباشرة من العوائل ( الأجور والإيجارات ).

I = مجموع الاستثمار في الموجودات الثابتة.

S = صافي التغير في المخزون.

E = مجموع الصادرات من السلع والخدمات.

F = الطلب النهائي.

X = مجموع المبيعات ( الإنتاج ) = out put.

M = مجموع الاستيرادات من السلع والخدمات.

P = مجموع الأرباح.

D = الاندثارات التي يقدرها أصحاب المهن المختلفة.

W = الأجور الكلية.

R = مجموع الإيجارات.

Y = الناتج ( الدخل) : product

والآن وبعد تثبيت الرموز المستعملة نستعرض الطرق الثلاثة المستعملة في قياس الدخل الوطني وهي :

**1- طريقة الناتج :**

يحسب الناتج (y) بموجب هذه الطريقة كما يلي :

**(أ)** الناتج = y = المبيعات + صافي المخزون - المستلزمات الوسيطة المشتراة من قبل الصناعات سواء المحلية أو المستوردة + مدفوعات عوامل الإنتاج من قبل قطاعات الطلب النهائي.

**(ب)** الناتج = y= مجموع مدفوعات عوامل الإنتاج من قبل الصناعات وقطاعات الطلب النهائي.

وبالرموز واستناداً للجدول أعلاه فإن حساب القيمة المضافة ( الناتج) للقطاع الواحد (الصناعة) يجري بموجب الصيغة الآتية :

$$y_j = \sum_{j=1}^{3} x_j - \sum_{i=1}^{3} a_{ij} - \sum_{j=1}^{3} m_j \qquad (4-28)$$

$$y_j = \sum_{j=1}^{3} W_j + R_j + P_j + D_j \qquad (4-29)$$

ثم تضاف القيمة المضافة للقطاع العائلي والحكومة لمجموع القيمة المضافة للقطاعات للوصول إلى القيمة المضافة للاقتصاد الوطني حيث لا توجد في الجدول قيم بقية قطاعات الطلب النهائي غير القطاع العائلي والحكومة.

$$V_C = \sum W_C + R_C \qquad ,V_G = \sum W_G + R_G$$

$$y = \sum_{j=1}^{3} Y_j + V_C + R_G \qquad (4-30)$$

حيث يشير C للقطاع العائلي ، G للقطاع الحكومي ، V للقيمة المضافة.

ودعنا نستعين بالبيانات الواردة في الجدول لشرح العلاقات أعلاه.

| الفقرة | مجموع المبيعات + صافي المخزون | المشتريات الوسيطة | | القيمة المضافة |
|---|---|---|---|---|
| | | من الصناعات (1،2،3) | من الاستيرادات | |
| الزراعة | 400 | 90 = 10 +30 +50 | 50 | 260 |
| الصناعة | 500 | 200 = 50+ 60 +90 | 150 | 150 |
| الخدمات | 260 | 155 = 5 + 80+70 | 20 | 85 |
| القطاع العائلي | . | - | - | 45 |
| الحكومة | . | - | - | 155 |
| مجموع المنتج | | | | 695 = |

وإذا ما أريد الاطلاع على كيفية عمل المعادلة (28-4) نبين ما يأتي :

$$y_1 = x_1 - (a_{11} + a_{21} + a_{31}) - m_1$$

$$= 400 - (50 + 30 + 10) - 50$$

$$= 260$$

مجموع القيمة المضافة في القطاع الزراعي

وبنفس الطريقة يمكن استخراج : $y_2$ ، $y_3$ أي القيمة المضافة في القطاعين : الصناعي والخدمات.

أما بموجب المعادلة (4-29) فإن الحسابات تجري كما يأتي :

| الفقرة | الأجور | الإيجارات | الأرباح | الاندثارات | القيمة المضافة |
|---|---|---|---|---|---|
| 1- الزراعة | 125 | 15 | 70 | 50 | 260 |
| 2- الصناعة | 90 | 5 | 40 | 15 | 150 |
| 3- الخدمات | 40 | 0 | 40 | 5 | 85 |
| 4- القطاع العائلي | 25 | 20 | 0 | 0 | 45 |
| 5- الحكومة | 150 | 5 | 0 | 0 | 155 |
| مجموع المنتج | | | | | 695 |

مع الإشارة إلى أن العلاقة (4-29) تعمل كما يلي :

$$Y_1 = W_1 + R_1 + P_1 + D_1$$

(وهنا يجدر التنبيه إلى أن i يمثل الصف ، j يمثل العمود في العلاقات أعلاه)

$$\therefore y_1 = 125 + 15 + 70 + 50 = 260$$

وبنفس الطريقة يمكن استخراج $y_2$ ، $y_3$

وعند حساب الإنتاج على مستوى الوطني نأخذ العلاقة (4-30) :

$$Y = Y_1 + Y_2 + Y_3 + W_C + R_C + W_G + R_G$$

$$\therefore Y = 260 + 150 + 85 + 25 + 20 + 150 + 5$$

$$= 695$$

## 2- طريقة الإنفاق :

ويجري حساب المنتج ( الدخل) حسب هذه الطريقة بجمع الاستهلاك العائلي و الأنفاق الحكومي والاستثمار وصافي المخزون والصادرات ونطرح من هذا المجموع الاستيرادات. أي أن:

$$Y = \sum C_i + \sum G_i + \sum I_i + \sum S_i + \sum E_i - \sum M_i \qquad (4-31)$$

ويمكن بيان عمل هذه الطريقة بموجب البيانات الواردة في الجدول كالآتي :

| الفقرة | المكونات | المجموع |
|---|---|---|
| 1- الاستهلاك العائلي | 120+70+130+200+25+20 | 565 |
| 2- الأنفاق الحكومي | 25+15+15+85+150+5 | 295 |
| 3- الاستثمار | 5+30+40+90 | 165 |
| 4- صافي الزيادة في المخزون | -5+10+5 | 10 |
| 5- الصادرات | 220 + 40 | 260 |
| 6- (-) الاستيرادات | 50+150+20+200+85+90+5 | -600 |
| مجموع الأنفاق | | 695 |

أما عمل العلاقة (4-31) فكما يلي :

نلاحظ أن:

$\sum_{i=1} (C_i + G_i + I_i + S_i + E_i)$ = مفردات الطلب النهائي.

$\therefore y$ = مجموع مفردات الطلب النهائي - الاستيرادات

ومن الجدول يلاحظ إن مجموع مفردات الطلب النهائي = 1295

وان مجموع الاستيرادات = 600

$$\therefore\ y = 1295 - 600 = 695$$

الفصل الرابع

### 3- طريقة الدخل:

ويحسب الناتج ( الدخل) بموجب هذه الطريقة كحاصل جمع كل من الأجور والإيجارات والأرباح والاندثارات وبالصيغة الجبرية كما يأتي:

$$Y=W+R+P+D$$

$$=\sum_{j=1} W_j+\sum_{j=1} R_j+\sum_{J=1} P_j+\sum_{J=1} D_J \quad (4\text{-}32)$$

وحسب البيانات الواردة من الجدول المستخدم -المنتج رقم (4-18) فإن حساب الدخل موجب الطريقة أعلاه يجري حسبما يأتي :

| الفقرة | المكونات | المجموع |
|---|---|---|
| 1- الأجور | 125+90+40+25+150 | 430 |
| 2- الإيجارات | 15+5+20+5 | 45 |
| 3- الأرباح | 70+40+40 | 150 |
| 4- الاندثارات | 5 + 15 +50 | 70 |
| مجموع الدخل | | 695 |

أما عمل العلاقة (4-32) فيمكن استخراجها مباشرة من الجدول كما يلي :

$$Y=\sum\sum W+R+P+D$$

$$=430+45+150+70$$

$$=695$$

وهكذا يتبين بان لجدول المستخدم - المنتج فائدة كبيرة في توفير المعلومات المهمة والضرورية لحسابات الدخل الوطني وكلما كان الجدول واسعاً ومفصلاً كلما كانت الفائدة منه لأغراض هذه الحسابات أجدى وانفع واشمل.

تمرين (4-1)

**أ- إذا أعطيت جدول المستخدم - المنتج بالصيغة الآتية وبافتراض توفر الشروط الضرورية في الجدول لإغراض التنبوء احسب ما يأتي :**

| من \ إلى | $x_1$ | $x_2$ | $\sum$ | $C$ | $I$ | $S$ | $E$ | $\sum$ | الإنتاج |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 30 | 20 | 50 | 10 | 5 | 1 | 4 | 20 | 70 |
| $x_2$ | 10 | 40 | 50 | 20 | 7 | 3 | 10 | 40 | 90 |
| $\sum$ | 40 | 60 | 100 | 30 | 12 | 4 | 14 | 60 | 160 |
| $M$ | 15 | 10 | 25 | 5 | 2 | 1 | 1 | 9 | 34 |
| $W$ | 10 | 10 | 20 | 2 | 1 | 1 | 0 | 4 | 24 |
| $P$ | 2 | 5 | 7 | 3 | 0 | 0 | 0 | 3 | 10 |
| $R$ | 2 | 3 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 |
| $D$ | 1 | 2 | 3 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 4 |
| $\sum$ | 30 | 30 | 60 | 10 | 3 | 2 | 2 | 17 | 77 |
| الإنتاج | 70 | 90 | 160 | 40 | 15 | 6 | 16 | 77 | - |

1- مستوى الإنتاج إذا زاد الاستهلاك بمقدار $\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$.

2- مستوى المستخدمات اللازمة لمواجهة الزيادة في الإنتاج الواردة في الفقرة (1) أعلاه.

3- احسب مقدار الناتج المحلي الإجمالي ( الدخل) بإحدى الطرق التي تراها مناسبة.

4- احسب جدول المعاملات التراكمية من الجدول أعلاه.

**ب- كلفت هيئة التخطيط بعمل تنبؤات للإنتاج على مستوى القطاعات ووضع الجهاز الإحصائي تحت تصرفها جدول المستخدم - المنتج لسنة (2000) وعلى الوجه التالي :**

| من \ إلى | $x_1$ | $x_2$ | $\sum$ | $C_P$ | $C_G$ | $I$ | $E$ | $S$ | $F$ | الإنتاج |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 18 | 10 | 28 | 12 | 4 | 4 | 2 | – | 22 | 50 |
| $x_2$ | 4 | 28 | 32 | 20 | 8 | 9 | 8 | 3 | 48 | 80 |
| $\sum$ | 22 | 38 | 60 | 32 | 12 | 13 | 10 | 3 | 70 | 130 |
| $M$ | 15 | 15 | 20 | 5 | 2 | – | – | – | 7 | 27 |
| $W$ | 10 | 6 | 16 | 5 | 2 | – | – | – | 7 | 23 |
| $R$ | 5 | 9 | 14 | 3 | – | – | – | – | 3 | 17 |
| $P$ | 3 | 4 | 7 | – | – | – | – | – | – | 7 |
| $D$ | 5 | 8 | 13 | – | – | – | – | – | – | 13 |
| $\sum$ | 28 | 42 | 70 | 13 | 4 | – | – | – | 17 | 87 |
| الإنتاج | 70 | 80 | 130 | 45 | 16 | 13 | 10 | 3 | 87 | · |

وكانت التنبؤات تتضمن استخراج ما يأتي :

1- حساب مستوى الإنتاج ( Out put )المتوقع في سنة (2001) إذا قدر الطلب النهائي (F) لهذه السنة بـ $\begin{bmatrix} 30 \\ 20 \end{bmatrix}$

2- حساب مستوى الإنتاج إذا ارتفع الاستهلاك العام ($C_G$) والاستهلاك الخاص ($C_P$) والاستثمار الكلي (I) إلى مستوى جديد في سنة (2001) ليكون] [مع بقاء الصادرات (E) وصافي المخزون (S) على ما هي عليه.

3- حساب مستوى المستخدمات الأولية اللازمة لمواجهة متطلبات التغير في مستوى الإنتاج المحسوب في الفقرة (1).

4- استخراج الناتج المحلي الإجمالي أي الدخل (Y) من الجدول وبأي من الطرق التي تراها مناسبة.

مع الإشارة إلى أن : (M) تمثل الاستيرادات و (W) الأجور، (R ) الإيجارات و (P) الأرباح ، و(D) الاندثارات أما ($x_1$,$x_2$) فهما القطاعات الإنتاجيان اللذان يتكون منهما الاقتصاد الوطني.

<u>المطلوب:</u>

باعتبارك الشخص المسؤول عن التنبؤات في الهيئة احسب هذه المؤشرات وعلق عليها باعتبارها من المتغيرات الإجمالية في الاقتصاد الوطني مبيناً مدى فعالية هذه التنبؤات وأثارها على عملية النمو الاقتصادي.

# الفصل الخامس

# البرمجة الخطية

# Linear Programming

# البرمجة الخطية

# Linear Programming

## 5-1 مقدمة

من المسائل الاقتصادية الهامة هي الكيفية التي يمكن فيها تعبئة الموارد المحدودة لتحقيق اكبر عائد ممكن ، وتوجد سبل عديدة لتوضيح وتبسيط كيفية بلوغ هذا الهدف ومن هذه السبل: البرامج الرياضية التي تعتبر ذات كفاءة وفاعلية عالية في هذا المجال وخاصة بعد أن أدخلت عليها تطورات كثيرة خلال العقود القليلة الماضية.

أما البرمجة الخطية فهي من بين البرامج الرياضية التي تتسم بالبساطة والاستعمال الواسع الانتشار ، وهي طريقة يتقرر بموجبها كيفية تحقيق أهداف معينة مثل تقليل الكلفة أو تعظيم الأرباح أو تشغيل كامل الطاقات الإنتاجية وغيرها. وعادة لا يحدث هذا بشكل طليق بل تحت قيود معينة مثل محدودية الموارد وكمية السلع والمواد المتوفرة وغيرها من القيود.



أما مفهوم الخطية فيأتي من العلاقة الخطية بين المتغيرات والتي تعني التناسبية بينها أي إذا كان إنتاج الطن الواحد من الحديد يكلف ( 100 ) وحدة نقدية فإن إنتاج ( 10 ) أطنان من الحديد يكلف (1000) وحدة نقدية. وإذا كانت ماكنة نسيج تنتج ( 30 ) م في الساعة الواحدة فإنها تنتج ( 600 ) م في ( 20 ) ساعة ومن المثالين أعلاه يتضح أن نسبة الطن الواحد إلى كلفة إنتاجه = $\frac{1}{100} = 0.01$

وبصيغة أخرى إن كلفة الطن الواحد =. $\frac{100}{100}=0.01$

أما بالنسبة لماكنة النسيج فإن:

الإنتاج إلى الوقت = كمية الانتاج / الوقت = 30 / 1 = 30 م/ساعة

أو كمية الوقت المبذول في الإنتاج = الوقت / كمية الانتاج = 1 / 30 ساعة /م

إن هذه التناسبية تجعل العلاقة بين المتغيرات علاقة خطية.

## 5-2 بعض المفاهيم الأولية Some Elementary Concepts

هناك بعض المفاهيم الأولية ذات الصلة الوطيدة بالبرنامج الخطي ويكون من المناسب استعراضها قبل الدخول في الموضوع:

أ- **دالة الهدف** (objective function): وهي الهدف الذي نسعى لتحقيقه من وراء النشاط الذي ترجم على شكل برنامج خطي.

ب- **التعظيم** (maximization): وهو الوصول بدالة الهدف إلى أعظم مستوى ممكن. وتختصر أحياناً ب ( max ).

ج- **التقليل** (minimization): وهو الوصول بدالة الهدف إلى اقل مستوى ممكن. وتختصر أحياناً ب ( min ).

د- **بشرط** (subject to): وهو خضوع دالة الهدف لمجموعة من الشروط أو القيود وتختصر أحيانا ب ( s. t. ).

ه- **القيود** (constraints): وهي مجموعة المحددات والشروط التي تقيد دالة الهدف.

و- **الأمثلية** (optimization): وهي البحث عن نقطة أعظم أو نقطة أدنى لدالة معينة مقيدة بمجموعة من القيود.

وبالإضافة للمفاهيم أعلاه هناك مفاهيم أخرى سيرد ذكرها ضمن الفقرات القادمة.

## 5-3 المعادلة والمتباينة في البرمجة الخطية Equality and Inequality

تختلف البرامج الرياضية ومنها البرامج الخطية عن الأمثلية التقليدية في كونها تبحث عن معالجة المسائل المقيدة بقيود تأخذ شكل متباينات وليس معادلات - فإذا افترضنا أن مسألة فيها متغيرين هما( x, y ) فإن القيد يأخذ صيغة: $g(x,y) \leq k$ وليس $g(x,y) = k$. ونتذكر في الفصول السابقة كيف أن المدرسة التقليدية كانت تصل إلى الأمثلية ( الحد الأقصى والحد الأدنى) للمعادلات الاقتصادية بإجراء التفاضل المناسب لها.

وعندما نكون أمام معادلة فإن حرية التصرف تكون مقيدة بحالة التساوي ( التعادل ) فالمستهلك الذي تبلغ مصروفاته ( 140 ) وحدة نقدية مقيد بهذا المقدار وفق ما تفترضه المدرسة التقليدية. أما في البرمجة الخطية فهناك حرية التصرف عندما تفترض هذه البرمجة أن مجموعة المصروفات ربما تكون ( 140 ) وحدة نقدية أو اقل من ذلك أي أن المصروفات ( $\leq 140$ ) حيث يكون الخيار للمستهلك في أن ينفق (140) أو أقل من ذلك ولكنه لا يستطيع تجاوز هذا المبلغ لأن ميزانيته بهذه الحدود. وعندما تكون القيود بصيغة متباينات تصبح المسألة أكثر واقعية وأكثر جاذبية لأنها تعطي مرونة كافية في التصرف.



## 5-4 هيكل البرنامج الخطي Linear Programming Structure

لغرض شرح وتوضيح كيفية بناء البرامج الخطية والصيغة التي تتكون منها بافتراض وجود متغيرين فقط هما ($x_1, x_2$ ) نأخذ المثالين الآتيين أحدهما لتعظيم دالة الهدف والآخر لتقليلها.

مثال(1):

في مشروع معين ينتج نوعين من السلع هي ($x_1, x_2$) ويستخدم لغرض إنتاج كل سلعة ثلاثة مكائن هي ( a, b, c ) وتحتاج كل وحدة من $x_1$ إلى تشغيل الماكنة ( a ) ( 4 )

ساعات والماكنة ( b ) إلى ( 2 ) ساعة والماكنة( c ) إلى ساعة واحدة أما السلعة $x_2$ فإنها تحتاج لتشغيل الماكنة (a) إلى (4) ساعات أيضا أو الماكنة (b) إلى (5) ساعات والماكنة (c) إلى (3) ساعات ، وان الوقت المتيسر للماكنة ( a ) هو ( 32 ) ساعة والوقت المتوفر للماكنة ( b ) هو ( 45 ) ساعة والوقت المتوفر للماكنة ( c ) هو ( 16 ) ساعة وعلى هذا الأساس نحصل على القيود الآتية:

يلاحظ أن الوقت المتوفر للماكنة (a) يتوزع على السلعتين ($x_1$,$x_2$) بحيث تستنزف السلعة ($x_1$) وقتا مقداره ($4x_1$) والسلعة ($x_2$) وقتا قدره ($4x_2$) أيضاً ويكون مجموع الوقت المستنزف يساوي أو لا يزيد عن ( 32) ساعة كما مبين في القيد الأول أدناه:

$$4x_1 + 4x_2 \leq 32$$

أما الوقت المتوفر للماكنة ( b ) فإنه يتوزع على السلعتين حسب القيد التي:

$$2x_1 + 5x_2 \leq 45$$

وهو القيد الثاني المفروض على المنتج. أما القيد الثالث فهو القيد المتعلق بالماكنة (c) حيث أن الوقت المتاح لها هو (16) ساعة ويستهلك من قبل السلعة ($x_1$) والسلعة ($x_2$) كالآتي:

$$x_1 + 3x_2 \leq 16$$

وقد كانت دالة الهدف: تعظيم الأرباح حسب الدالة التالية:

$$z = 4x_1 + 6x_2$$

وحيث أن إنتاج أي من السلعتين لا يمكن أن يكون سالباً أي أنه موجب أو على الأقل صفراً ولهذا فهناك قيدين إضافيين هما:

$$x_1 \geq 0 \ , \ x_2 \geq 0$$

والآن نستطيع عرض النموذج بصورته المتكاملة كما يلي:

$$\text{max. } z = 4x_1 + 6x_2 \qquad (5\text{-}1)$$

s.t.

$$4x_1 + 4x_2 \leq 32 \qquad (5\text{-}2)$$

$$2x_1 + 5x_2 \leq 45$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 16 \qquad (5\text{-}3)$$

$$x_1 \geq 0 \;,\; x_2 \geq 0$$

والصيغة أعلاه هي الصيغة القياسية للبرنامج الخطي وأي زوج من قيم ($x_1$ , $x_2$) يفي بمتطلبات المتباينات ( 5-2 ) و ( 5-3 ) هو الحل للمسألة. أما الحل الأمثل فهو الحل الممكن من بين الحلول الممكنة الذي يفي بمتطلبات ( 5-1 ).

وتكتب الصيغة أعلاه بمفهوم المصفوفات كالآتي:



$$Z = CX$$

$$s.t.$$

$$Ax \leq B$$

$$X \geq 0$$

حيث أن:

$$C = (c_1, c_2, c_3, \ldots\ldots, c_n)$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{pmatrix} , \quad A = \begin{bmatrix} a_{11}, a_{12} ,\ldots, a_{1n} \\ a_{21}, a2 ,\ldots, a_{2n} \\ . \\ . \\ . \\ a_{m1}, a_{m2} ,\ldots, a_{mn} \end{bmatrix}$$

مثال(2):

والآن لنأخذ مثالا آخر في تقليل دالة الهدف وليس تعظيمها فإذا افترضنا أن عليقة معينة جرى اختبارها فوجدت أنها لأنسب لحيوان معين بكونها تجهزه بما لا يقل عن (4000) سعره حرارية و(120) وحدة بروتين في اليوم الواحد. وهناك نوعان من الأغذية يمكن استخدامها في تحضير العليقة أعلاه ولكن بكلفة وقيمة غذائية مختلفتين كما مبين في أدناه:

| الغذاء | الكلفة وحدة نقدية/ كغم | سعره حرارية | وحدة بروتين |
|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 500 | 3 |
| 2 | 3 | 60 | 8 |

وفي ضوء المعلومات أعلاه يمكن صياغة النموذج الآتي بحيث نحصل على عليقة بأقل التكاليف وتفي بمتطلبات الغذاء المرغوب به:

لنفرض أن $x_1$ يمثل الطعام رقم ( 1 ) و $x_2$ يمثل الطعام رقم ( 2 ) على التوالي.

وعلى هذا الأساس يكون النموذج كالآتي:

$$z = 5x_1 + 3x_2$$

$$s.t.$$

$$500x_1 + 60x_2 \leq 4000$$

$$3x_1 + 8x_2 \leq 120$$

$$x_1 \geq 0 , \quad x_2 \geq 0$$

وتكتب هذه الصيغة بمفهوم المصفوفات كالآتي:

$$\min. \quad Z = CX$$

$s.t.$

$$AX \geq B$$
$$X \geq 0$$

## 5-5 حل البرنامج الخطي ذي المتغيرين بطريقة الرسم البياني

لغرض توضيح المفاهيم الأساسية للبرنامج الخطي نبدأ عملنا بطريقة الرسم البياني لنموذج ذي متغيرين كالنموذج الآتي:

$$\max \quad z = x_1 + 3x_2$$

$s.t.$

$$(1) \quad 2x_1 + 5x_2 \leq 24$$
$$(2) \quad 3x_1 + x_2 \leq 10$$
$$(3) \quad x_1 \geq 0$$
$$(4) \quad x_2 \geq 0$$



والآن دعنا نحاول حل النموذج أعلاه بطريقة التجربة والخطأ قبل الذهاب إلى طريقة الرسم البياني. إن طريقة التجربة والخطأ تتخلص باختيار قيم متعددة لكل من ($x_1$ ,$x_2$) بحيث تفي هذه القيم بمتطلبات القيود من (1) إلى (4) وتعطي قيما مختلفة لدالة الهدف (z) وبتكرار هذه العمليات سنجد قيمة ($x_1$ ,$x_2$) التي تعطي دالة الهدف أعظم قيمة وحينذاك نكون قد توصلنا للحل المطلوب.

إذاً لنبدأ العمل ولنختار كخطوة أولى: ($x_1 = 2$ ، $x_2 = 1$)

وبتعويض هاتين القيمتين في كل من القيود الأربعة أعلاه نلاحظ أنها تفي بمتطلباتها ولزيادة الإيضاح ندون النتائج الآتية:

$$2(2) + 5(1) = 9 \leq 24$$

$$3(2) + 1(1) = 7 \leq 10$$

كما أن كل من القيدين (3) و (4) قد استوفينا متطلباتهما لان القيم التي اختيرت لكل من ($x_1$ ، $x_2$) هي قيم موجبة توفي بمتطلبات عدم سلبية هذه المتغيرات.

والآن ما الذي حصلنا عليه في دالة الهدف؟ لنعوض ونراقب:

$$z = 1(2) + 3(1)$$

$$= 5$$

وربما تكون هذه هي القيمة الأعظم لدالة الهدف ولكن أذا نظرنا إلى النتائج استخدامنا لمستلزمات الإنتاج وهي (24) و(10) فلا زال الدنيا كميات لم تستغل بعد إذن لنجرب ونختار زوجا آخر من القيم ولتكن: $x_1 = 1$ ، $x_2 = 4$ أن هذا الزوج من القيم يفي بمتطلبات القيود الأربعة ويعطي قيمة للدالة الهدف بمقدار $z = 13$.

إذن الزوج الثاني من القيم أفضل من الزوج الأول وربما هناك زوج أفضل ودعنا نختار: $x_1 = 0$ ، $x_2 = 5$ ويلاحظ أن هذا الزوج يعطي قيمة اكبر لدالة الهدف ($z = 15$) ولكنه لا يفي بمتطلبات القيد (1) وبهذا نستبعد هذا الاختيار.

وهكذا نواصل اختياراتنا وليكن الاختيار هذه المرة $x_1 = 2$ ، $x_2 = 4$ ومنه نحصل على $z = 14$، ويبدو أن هذا الاختيار يفي بمتطلبات القيود وقد يعطي قيمة أعظم للدالة.

إن الوصول إلى الاختيار الذي يحقق الحل الأمثل لدالة الهدف ويستوفي الشروط المفروضة عليها يتطلب عددا غير محدود من الاختيارات لزوج من قيم ($x_1, x_2$). ولهذا فإن طريقة التجربة أو الخطأ هي طريقة متعبة ومملة ولا بد من التفتيش عن طريقة أسهل.

وتوجد طرق أخرى سهلة وبسيطة في حل البرنامج الخطي يستند بعضها إلى طريقة الرسم البياني ، وأن العلاقات الخطية في البرنامج الخطي تحتاج إلى استذكار ما شرحناه في الفصل الأول عن كيفية رسم معادلة الخط المستقيم التي تعتبر الأساس في هذه الطريقة. والآن لنجرب طريقة الرسم البياني في حل النموذج الخطي:

* خطوات العمل في طريقة الرسم البياني

1- نهيئ الإحداثيات اللازمة للمتغيرين وليكن أحدهما المحور العمودي والآخر المحور الأفقي.

2- نحول القيود التي تأخذ صيغة المتباينات إلى معادلات.

3- نرسم الخط المستقيم الذي يمثل كل معادلة باستخدام صيغة الجزء المحور.

4- نرسم الخط المستقيم الذي يمثل دالة الهدف على افتراض أن دالة الهدف (z) تساوي قيمة مناسبة.

5- نحدد منطقة الحلول الممكنة (feasible area) وهي المنطقة التي تقع فيها جميع الاختيارات (غير المحدودة) لقيم (x1, x2) والتي تفي بمتطلبات القيود وتعطي دالة الهدف قيما معينة من بينها زوج القيم الذي يعطي الحل الأمثل.

6- نبدأ بإزاحة خط دالة الهدف إلى خارج (بعيداً عن نقطة الأصل) إذا كانت المسألة تعظيم الدالة و(باتجاه نقطة الأصل) إذا كانت المسألة تقليل الدالة. وتكون آخر نقطة من منطقة الحلول الممكنة يغادرها خط دالة الهدف هي النقطة الأعظم أو النقطة الأقل كل حسب اتجاه الإزاحة. وعند تلك النقطة تتحدد قيمتا المتغيرين اللذين يعطيا القيمة الأعظم أو الأقل للدالة.

ملاحظة:

تقع جميع عمليات الرسم البياني للنموذج الخطي في الربع الأول من الإحداثيات لوجود عدم السلبية ولهذا نجد دائما من جملة شروط البرنامج الخطي الآتي:

$$x_1 \geq 0 \ , \ x_2 \geq 0$$

والآن دعنا نحل المثال السابق بطريقة الرسم البياني:

المثال السابق هو:

$$\max. \ z = x_1 + 3x_2$$

$s.t.$

$$2x_1 + 5x_2 \leq 24$$

$$3x_1 + x_2 \leq 10$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

نباشر الحل حسب الخطوات أعلاه كالآتي:

**الخطوة (1):** نهيئ الإحداثين اللازمين كما في الشكل رقم ( 5-1 ).

**الخطوة (2):** نحول المتباينات إلى معادلات فيصبح النموذج كالآتي:

$$\max. \ z = x_1 + 3x_2$$

$s.t.$

$$2x_1 + 5x_2 = 24$$

$$3x_1 + x_2 = 10$$

$$x_1 \geq 0 \ , \ \ x_2 \geq 0$$

**الخطوة (3):** نرسم الخط المستقيم الذي يمثل كل معادلة كالآتي:

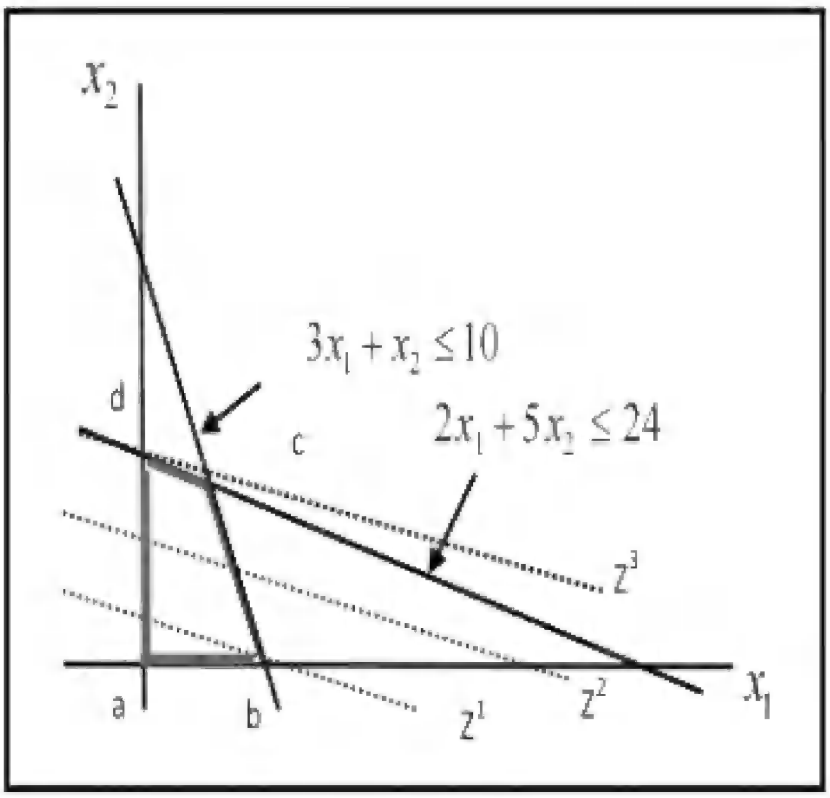
المعادلة الأولى: إذا كانت: $x_1 = 0$ فإن: $x_2 = \frac{24}{5}$

وإذا كانت: $x_2 = 0$ فإن: $x_1 = \frac{24}{2} = 12$

المعادلة الثانية: إذا كانت: $x_1 = 0$ فإن: $x_2 = 10$

وإذا كانت: $x_2 = 0$ فإن: $x_1 = \frac{10}{3}$

ونستطيع الآن رسم الخطين ( 1) و (2) في الشكل ( 5-1 ).




شكل رقم ( 5-1 )



**الخطوة (4):** نرسم الخط الذي يمثل دالة الهدف بافتراض أن z يساوي أي قيمة مناسبة ولتكن الآن ( 6 ):

لدينا:

$$x_1 + 3x_2 = 6$$

إذا كانت : $x_1 = 0$ فإن: $x_2 = 2$

وإذا كانت: $x_2 = 0$ فإن: $x_1 = 6$

والآن نرسم الخط المستقيم الذي يمثل دالة الهدف كما مبين في الشكل أعلاه.

**الخطوة (5)**:نحدد منطقة الحلول الممكنة وهي كما في الشكل الرباعي ( a b c d ).

**الخطوة (6)**: نحرك خط دالة الهدف إلى الخارج ( بعيدا عن نقطة الأصل ) سعيا وراء تعظيم الدالة ونلاحظ أن آخر نقطة في المضلع ( a b c d ) يغادرها خط دالة الهدف خلال عملية تحريكه للخارج هي النقطة ( d ) والخط هنا هو $z_3$، وهذه النقطة هي التي تبلغ عندها الدالة أعظم قيمة مع مراعاة متطلبات القيود المفروضة عليها وبذلك فهي تعطينا الحل الأمثل للنموذج حيث عندها يكون:

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = \frac{24}{5}$$

$$z = x_1 + 3x_2$$

$$= 0 + 3x\frac{24}{5} = \frac{72}{5} = 14.4$$

ومن الحل نستنتج بأن الحل الأمثل السابق الذي اعتمد طريقة التجربة - الخطأ كان قريبا من الحل الأخير ولكنه ليس أمثلاً بالمعنى الدقيق حيث كانت نتائجه: $x_2 = 4$ و $x_1 = 2$ و $z = 14$. إضافة إلى الأسلوب المطول والممل الذي تتطلبه طريقة التجربة والخطاء.

لنأخذ مثالاً آخر ولكن قبل الشروع بذلك لنستفيد من المبرهنة الآتية:

مبرهنة

إذا كان هناك حلاً وحيداً يعظم أو يقلل دالة هدف خطية. فإن هذا الحل يجب أن يقع في أحد رؤوس المضلع الذي يمثل منطقة الحلول الممكنة. وإذا كان هناك أكثر من حل فإن حلين على الأقل ينبغي أن يناظرا الرؤوس المتجاورة لمضلع الحلول الممكنة.

وعلى هذا الأساس فإن قيمة دالة الهدف المثلى يتم التفتيش عنها عند رؤوس المضلع. وهذا ما يوصلنا سريعا إلى الحل الأمثل لكونه يقع عند أحد هذه الرؤوس.

أن الحلول التي تقع عند رؤوس المضلع تسمى الحلول الممكنة الأساسية أو الاقتصادية أو اختصارا الحلول الأساسية. ( **basic solution** )

مثال(2):

حل النموذج الخطي الآتي بطريقة الرسم البياني.

$$\max.\ \ z = x_1 + 3x_2$$



$$s.t.$$

$$x_1 + x_2 \le 4$$

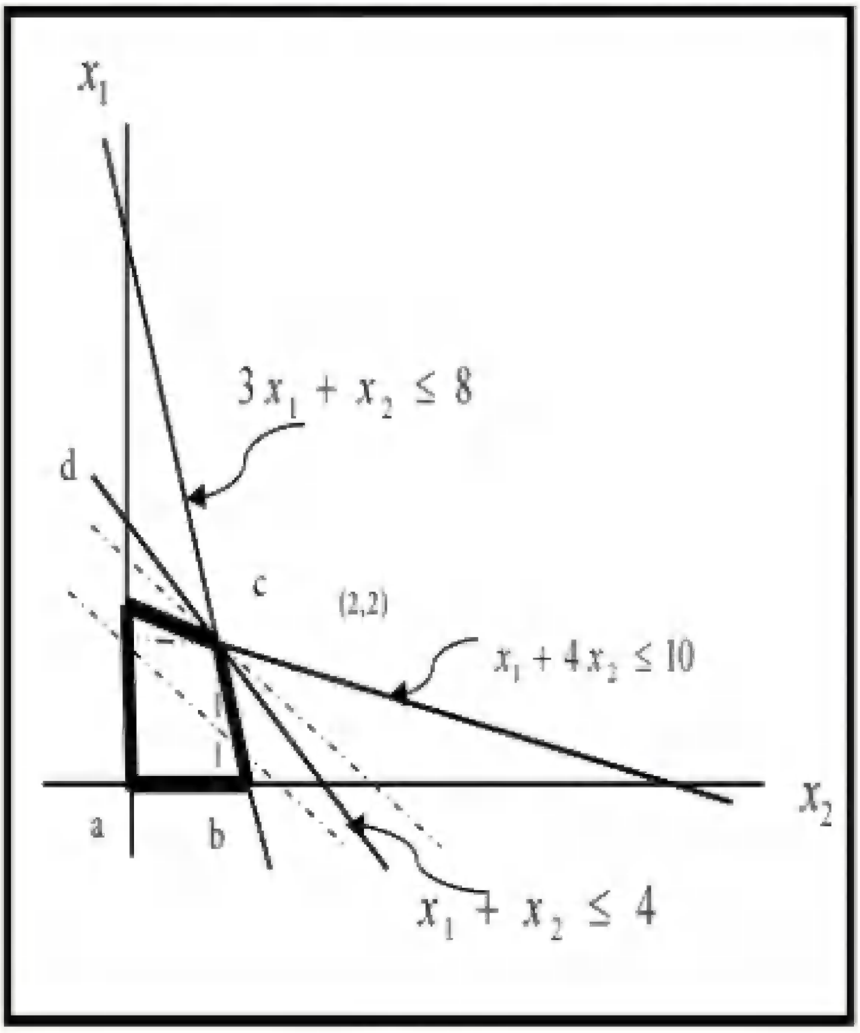
$$x_1 + 4x_2 \le 10$$

$$3x_1 + x_2 \le 8$$

$$x_1 \ge 0\ ,\ \ x_2 \ge 0$$

الجواب:

بإتباع الخطوات الستة التي ذكرت سلفا نحصل على النتيجة المبينة في الشكل (5-2):




الشكل( 5-2)

وبالاستفادة من المبرهنة أعلاه التي ترشدنا إلى أن الحل الأمثل يقع في إحدى الرؤوس (a b c d) وإذا ما وقع الاختيار على النقطة ( d ) مثلا لغرض رسم خط دالة الهدف فإن دالة الهدف عند هذه النقطة تساوي (7.5) حيث أن:

$$(Z = 2(0) + 3(2-5) = 7.5)$$

وعلى هذا الأساس يتحدد خط الدالة كالآتي:

إذا كانت: $x_1 = 0$ فإن: $x_2 = \frac{5}{2}$

وإذا كانت: $x_2 = 0$ فإن: $x_1 = \frac{15}{4}$

وهكـذا يكـون خـط دالـة الهـدف كـما مبـين في الـشكل أعـلاه وعنـد إزاحـة هـذا الخـط يظهر أن نقطة الحل الأمثل هي ليست النقطة ( d ) بل النقطة ( c ) وعندها يكون الحل الأمثل كالآتي:

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = 2$$

$$z = 2(2) + 3(2) = 10$$ ( وهو الحل الأمثل )

ويتبين بأن النقطة ( c ) تعطي قيمة اكبر من التي تعطيها الرؤوس الأخرى للمضلع ( a b c d ) لدالة الهدف حيث أن:

(a) تعطي $z = 0$ والنقطة (b) تعطي $z = \frac{16}{3}$ والنقطة (d) تعطي $z = 7.5$ بينما (c) تعطي $z = 10$.

<u>ملاحظة هامة:</u>



يلاحظ من البرنامج الخطي الذي يرمي لتعظيم دالة الهدف أن القيود توضع على شكل متباينات بصيغة (أصغر أو تساوي) كمية معينة وبالعكس في البرنامج الخطي الذي يرمي لتقليل دالة الهدف فإن القيود توضع بشكل متباينات هي(أكبر أو تساوي) كمية معينة. وتفسير ذلك هو: أن تعظيم الدالة أي الوصول إلى النقطة الأعظم لا بد وانه يتطلب توفر مستلزمات هي محدودة أصلاً فهي تساوي أو تقل عن كمية معينة وإذا لم تكن محدودة ونادرة لما كانت هناك مشكلة أمام تعظيم الدالة. وبالمقابل أن تقليل دالة الهدف يعني الضغط على دالة الهدف لتصل إلى اصغر نقطة ممكنة بحيث لا تنخفض مستويات الإنتاج مثلا عند حدود معينة مطلوبة وبهذا فهي تساوي أو اكبر من المستوى المذكور. ولكن قد نجد في بعض النماذج الخطية قيودا هي (أكبر أو تساوي أو أصغر أو تساوي معاً) في دالة تعظيم أو في دالة تقليل.

مثال(3):

$$\max \quad Z3 = x_1 + 2x_2$$

$$s.t.$$

$$2x_1 + x_2 \geq 5$$

$$5x_1 + 2x_2 \geq 15$$

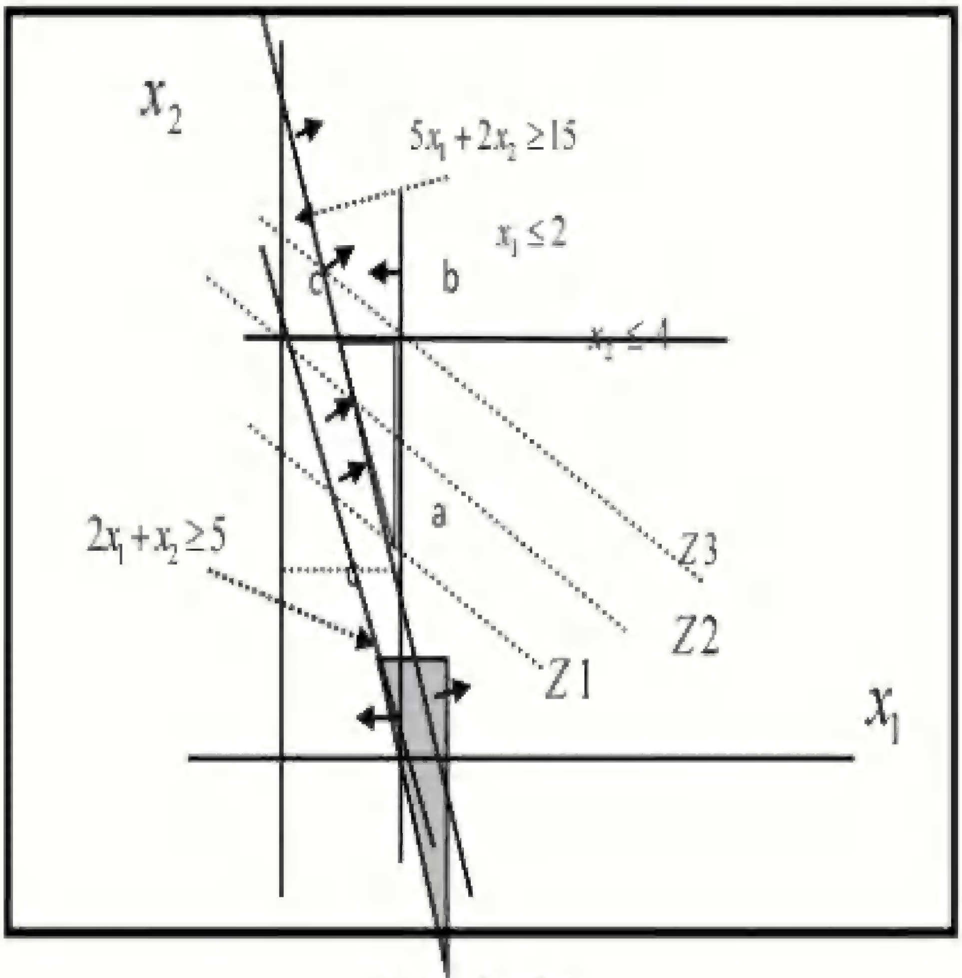
$$x_1 \leq 2$$

$$x_2 \leq 4$$

$$x_1 \geq 0 \ , \quad x_2 \geq 0$$

الجواب:

بعد رسم النموذج بيانياً حسب الخطوات الستة يظهر الحل كما في الـشكل( 3-5 ) حيث المنطقـة (a b c) منطقة الحلول الممكنة:




شكل رقم ( 3-5 )

وقد أشار خط دالة الهدف $z$ إلى اقل نقطة في منطقة الحلول الممكنة ( a b c ) وذلك عند النقطة ( a ) حيث يكون الحل كالآتي:

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = 2.5$$

$$z = 2 + 2(2.5) = 7$$

ولغرض المقارنة نلاحظ أن النقطة b تعطي قيمة لدالة الهدف مقدارها $z = 10$ والنقطة c قيمة مقدارها $z = 9.5$ ومن ذلك يتبين أن اقل نقطة للدالة هي( 7 ) وتفي بمتطلبات القيود وهي النقطة المطلوبة أي النقطة ( a ).

مثال(4):

جد الحل الأمثل للبرنامج الآتي:



$$\max \quad Z = x_1 + 2x_2$$

$$s.t.$$

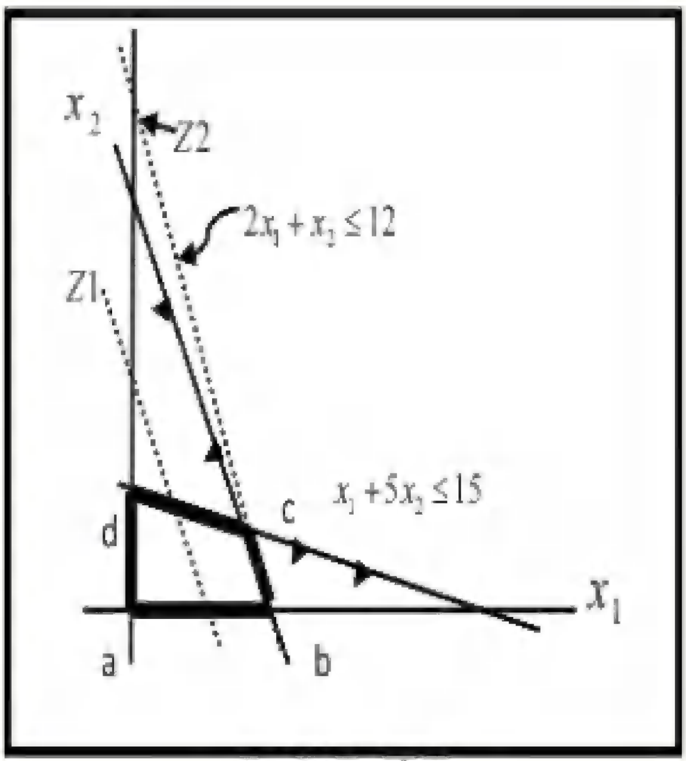
$$x_1 + 5x_2 \le 15$$

$$2x_1 + x_2 \le 12$$

$$x_1 \ge 0 \ , \quad x_2 \ge 0$$

الجواب:

بعد تمثيل المسالة بيانياً نحصل على الحل المبين في الشكل رقم ( 4 - 5 ):



الشكل رقم ( 5-4 )

ومن الرسم نستنتج أن الحل الأمثل هو في خط دالة الهدف $z_2$ حيث أن:

$$x_1 = 6$$

$$x_2 = 0$$

$$z = 18$$

إذن أعظم قيمة للدالة تكون عند النقطة $(x_1, x_2) = (6 \ , \ 0)$ والتي تفي بمتطلبات القيود في الوقت نفسه.

## تمارين ( 5-1 )

**جد الحل الأمثل للمسائل الخطية التالية:**

1)

$$\max \ Z = x_1 + 2x_2$$

$s.t.$

$$5x_1 + 2x_2 \le 20$$

$$x_1 + 3x_2 \le 9$$

$$x_1 \ge 0$$

$$x_2 \ge 0$$

2) $\min \quad Z = 2x_1 + 3x_2$

$s.t.$

$$5x_1 + 3x_2 \geq 18$$
$$4x_1 + x_2 \leq 16$$
$$x_1 \leq 3$$
$$x_2 \leq 10$$
$$x_1 \geq 0 , \quad x_2 \geq 0$$

3) $\max \quad z = x_1 + x_2$

$s.t.$

$$x_1 + 2x_2 \leq 10$$
$$x_1 + x_2 \geq 1$$
$$x_2 \leq 3$$
$$x_1 \geq 0 , \quad x_2 \geq 0$$



4) $\min \quad Z = x_1 - 5x_2$

$s.t.$

$$2x_1 - 5x_2 \geq -10$$
$$x_1 + x_2 \leq 8$$
$$x_1 \geq 0 , \quad x_2 \geq 0$$

## 5-6 حل البرنامج الخطي بطريقة السمبكلس
## Solution of LP by Simplex Method

قلنا في الفقرة السابقة إن البحث عن الحل الأمثل يجري عند زوايا مضلع الحلول الممكنة وإذا ما كان لدينا نموذجاً خطياً يحتوي على عدد كبير من المتباينات فسيكون هناك مضلع يحتوي على عدد كبير من الزوايا مما يجعل استخدام طريقة الرسم البياني هي الأخرى طريقة مطولة ومملة. فعلى سبيل المثال إذا كان عدد المتباينات (8) في برنامج خطي، وكل متباينة تحتوي على متغيرين فإن عدد الزوايا يكون حسب الصيغة الآتية:

$$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!} \qquad (4-5)$$

حيث إن (C) تمثل عدد الزوايا و (n) عدد المتباينات و (r) عدد المتغيرات وعلاقة التعجب (!) هي مضروب وتقرأ مضروب (factorial n) فإذا كانت n = 8 فإن: عدد الزوايا في الفرضية أعلاه يكون:

$$C = \frac{8!}{2!(8-2)!} = \frac{8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{2\times1\times6\times5\times4\times3\times2\times1} = 28$$

وهكذا تبدو مدى صعوبة وتعقيد حل مشكلة كهذه عن طريق الرسم وعليه فقد لجأ المعنيون بالبرمجة الرياضية إلى تطوير أساليب أخرى لتسهيل حل البرامج الخطية منها طريقة السمبلكس (simplex) والتي تركز على أسلوب المرور بالزوايا الأكثر قرباً من زاوية الحل الأمثل باتجاه الحل الأمثل نفسه وبحسابات رياضية معينة وليس بالرسم البياني.

وتقوم طريقة السمبلكس عن استخراج الحل الممكن بأسلوب التكرار لتحسين هذا الحل ليقترب من الحل الأمثل. ويعتمد أسلوب التكرار هذا على المصفوفة الجبرية وبشكل خاص استخدام معكوس المصفوفة في حل المعادلات الخطية الآنية (راجع الفقرتين 3-9، 3-10 ).

وتتخلص الخطوات التي تتبع في حل البرنامج الخطي بطريقة السمبلكس بالآتي:

والتي سنشرحها تفصيلياً من خلال الأمثلة التوضيحية:

1- تحويل المتباينات إلى معادلات بإضافة (متغيرات إضافية) تدعى(slack variables) *.

فإذا كانت المتباينة من النوع (أكبر أو يساوي ≥ ) ففي هذه الحالة نطرح متغير إضافي من الطرف الأيسر منها ، وإذا كانت من النوع ( أصغر أو يساوي ≤ ) نضيف متغير إضافي إلى الطرف الأيسر. أما دالة الهدف فبالرغم من إضافة المتغيرات الإضافية إليها إلا أنها لا تتغير وذلك لان القيمة التي تعطى لهذه المتغيرات عند إضافتها لدالة الهدف تساوي صفراً. وعليه فإن هذه المتغيرات تحذف من دالة الهدف.

2- ترتيب البيانات الواردة في النموذج في جدول خاص يدعى جدول السمبلكس لنأخذ مثالاً قبل شرح كيفية ترتيب البيانات في الجدول:

$$\max Z = c_1X_1 + c_2X_2 + .... + c_nX_n$$

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + ....... + a_{1n}X_n \le b_1$$

$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + ....... + a_{2n}X_n \le b_2$$

--

--

$$a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + ....... + a_{mn}X_n \le b_m$$

$$X_j \ge 0 \qquad j = 1,2,......,n$$



وبعد إضافة المتغيرات الإضافية يصبح النموذج كالأتي بشرط:

$$\max Z = c_1X_1 + c_2X_2 + .... + c_nX_n + c_{n+1}S_1 + c_{n+2}S_2 + ... + c_{n+m}S_m$$

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + ....... + a_{1n}X_n + S_1 \qquad = b_1$$

* وجدنا أن المعنى المناسب لكلمة (slack) هو إضافية حيث تحمل إلينا قواميس المصطلحات الفنية معان كثيرة قد لا تكون مناسبة مثل مهملة أو رخوة أو ضعيفة وغيرها..الخ.

$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \ldots\ldots + a_{2n}X_n \qquad + S_2 \qquad\qquad = b_2$$

.

.

$$a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \ldots\ldots + a_{mn}X_n + .. + \qquad\qquad S_m = b_n$$

$$X_j \geq 0 \qquad j = 1,2,\ldots\ldots,n$$

$$S_j \geq 0 \qquad j = n+1,\ldots\ldots,n+m$$

$$C_j = 0 \qquad j = n+1,\ldots\ldots,n+m$$

والآن دعنا نلقي نظرة على ترتيب البيانات في الجدول (5-1) الذي يأخذ الصورة التالية:

جدول السمبلكس (5-1)

ربح الوحدة الواحدة

المتغيرات التي يحتويها الحل

قيمة المتغيرات التي يحتويها الحل

| | | $c_j$ | $c_1$ | $c_2$ | ... | $c_n$ | 0 | 0 | ... | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $CB_i$ | Basis | Value | $x_1$ | $x_2$ | ... | $x_n$ | $s_1$ | $s_2$ | ... | $S_m$ | check |
| 0 | $S_1$ | $b_1$ | $a_{11}$ | $a_{21}$ | $\cdots$ | $a_{1n}$ | 1 | 0 | $\cdots$ | 0 | |
| 0 | $S_2$ | $b_2$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ | $\cdots$ | $a_{2n}$ | 0 | 1 | $\cdots$ | 0 | |
| . | . | . | $\vdots$ | $\vdots$ | $\cdots$ | $\vdots$ | | $\vdots$ | | | |
| . | . | . | $a_{m1}$ | $a_{m2}$ | $\cdots$ | $a_{mn}$ | 0 | 0 | $\cdots$ | 1 | |
| 0 | $S_m$ | $b_m$ | | | | | | | | | |
| | $c_j - z_j$ | 0 | $c_1$ | $c_2$ | ... | $c_n$ | 0 | 0 | ... | 0 | |

$A_{m \times n}$ $\qquad I_{m \times m}$

حيث أن:

$c_i$ = قيمة المتغيرات التي يحتويها الحل.

Basis = المتغيرات التي يحتويها الحل.

$CB_i$ = ربح الوحدة الواحدة.

وقد يكون من الأفضل قبل الانتقال إلى الخطوة الثالثة أن نضرب مثالاً بسيطاً للجدول أعلاه. خذ المثال الآتي:

مثال(1):

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2$$

$$(1) \qquad s.t. \qquad x_1 + 5x_2 \le 8$$

$$(2) \qquad 6x_1 + 4x_2 \le 16$$

$$x_1 \ge 0\,, \quad x_2 \ge 0$$



ونبدأ العمل بتحويل المتباينات إلى معادلات كالآتي ويعتبر معامل كل مجهول لا يظهر في المعادلة يساوي صفراً:

$$x_1 + 5x_2 + s_1 + (0)s_2 = 8$$

$$6x_1 + 4x_2 + (0)s_1 + s_2 = 16$$

كما ندخل على دالة الهدف $s_1, s_2$ ولكن بمعامل قيمته صفراً وبهذا لا تتغير الدالة بل تبقى على حالها. أي تصبح بالصورة الآتية:

$$Z = 2x_1 + 3x_2 + (0)s_1 + (0)s_2$$

$$= 2x_1 + 3x_2 + (0) + (0)$$

$$= 2x_1 + 3x_2$$

وبـذلك يـبدو واضحاً عـدم الحاجة لإجراء هـذه العمليـة ولكـن ينبغـي أن يبقـى في الـذهن أن $c_{n+1} = 0, c_{n+2} = 0$ وفي مثالنا أعلاه فإن كل من:

$$c_3 = 0 , c_4 = 0$$

والآن لدينا مصفوفتان هما: $A_{m\times n} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}, I_{m\times m} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

ونقوم بإدخالهما في الجدول مع بقية البيانات كما مبين في الجدول رقم (5-2) الآتي:

جدول السمبلكس رقم (5-2)

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $c_j$ | 2 | 3 | 0 | 0 | |
| $CB_i$ | Basis | Value | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | Check |
| 0 | $s_1$ | 8 | 1 | 5 | 1 | 0 | 15 |
| 0 | $s_2$ | 16 | 6 | 4 | 0 | 1 | 27 |
| | $C_j$-$Z_j$ | 0 | 2 | 3 | 0 | 0 | 5 |

وتظهر في الجدول الموجهات الآتية أيضاً:

أ- الصف $c_j = [2 \quad 3 \quad 0 \quad 0]$ ويحتوي على قيمة معاملات المتغيرات في دالة الهدف.

ب- العمود $CB_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ويحتوي على معاملات متغيرات دالة الهدف الموجودة في الحل الأساسي

وقد سميناها المتغيرات الأساسية وحيث أن الحل يبدأ من الصفر أي عندما يكون $x_1 = 0$ و $x_2 = 0$ فإن: $S_1, S_2$ يكونان في (basis) وحيث أن معاملي $S_1, S_2$ في دالـة الهـدف (0,0) على التوالي لذلك تظهر في (CBi) كعمود عناصره أصفار.

ج- عمود المتغيرات الأساسية (basis) يشير إلى المتغيرات الموجودة في عمود المتغيرات الأساسية الجارية وحيث أن الحل يبدأ من الصفر كما ذكرنا لذلك نرى أن $(S_1, S_2)$ في الـ(basis).

د- عمود القيمة = $\begin{bmatrix} 8 \\ 16 \end{bmatrix}$ ويحتوي على قيم المتغيرات الأساسية وهنا وكبداية ظهرت قيم $S_1 = 8, S_2 = 16$ بافتراض $x_1 = 0, x_2 = 0$ .

لاحظ الخطوة رقم (3) التالية.

هـ- الصف: $C_j - Z_j = [2 \quad 3 \quad 0 \quad 0]$ ويحتوي على قيمة معاملات المتغيرات في دالة الهدف (Z).

و- عمود التدقيق = $\begin{bmatrix} 15 \\ 27 \\ 5 \end{bmatrix}$ وهو عمود لا علاقة له بالحل ولكنه مفيد في يوضع لأجل الوقوف على صحة الحسابات التي تجري في الجدول والأعداد التي تظهر فيه ما هي إلا حاصل جمع البيانات في كل صف ، من الجدول أعلاه وتظهر هذه الحسابات كما يلي:



الصف الأول 8+1+5+1+0=15

الصف الثاني 16+6+4+0+1=27

الصف الثالث 0+2+3+0+0=5

والآن بعد أن اتضحت طريقة ترتيب وإدخال البيانات في جدول السمبلكس نتابع شرح واستعراض خطوات الحل منتقل إلى الخطوة التالية.

3- تحديد الحل الممكن من جدول السمبلكس ونبدأ بالحل الابتدائي الذي يفترض أن $X_2 = 0$ ، $X_2 = 0$ وان $S_1 = 8$ في المعادلة(1) $S_2 = 16$ في المعادلة (2) ومن

ذلك ينتج أن 0 = Z وهذا الحل يفي بمتطلبات القيود ومتطلبات عدم السلبية معا ويقع عند رأس منطقة الحلول الممكنة الذي يقع بدورة عند نقطة الأصل في الإحداثيات. ومن الطبيعي أن هذا الحل ليس هو الحل الأمثل وإنما هو المنطق نحو الحل الأمثل الذي نفتش عنه في الخطوة التالية:

4- التدقيق لمعرفة فيما إذا تم التوصل إلى الحل الأمثل من عدمه وهذا يتم من خلال ملاحظتنا الصف الأخير من جدول السمبلكس الابتدائي (4-5) حيث يوجد الصف $C_j$-$Z_j$ الذي يمثل صافي الكلفة أو صافي ( الربح ) من جراء إضافة وحدة واحدة من احد المتغيرات وذلك كما يلي:

أ- في حالة تعظيم الدالة فإن ظهور عدد موجب واحد على الأقل في الصف $C_j$-$Z_j$ يشير إلى أن ( الربح ) يمكن أن يتحسن ،أما غياب الإعداد الموجبة كلية من الصف $C_j$-$Z_j$ فيشير إلى عدم إمكانية تحسين ( الربح ) وهذا يعني التوصل للحل الأمثل.

ب- أما في حالة إقلال الدالة فإن ظهور عدد سالب واحد على الأقل في الصف $C_j$-$Z_j$ يشير إلى أن ( التكاليف ) يمكن أن تنخفض ، أما غياب الأعداد السالبة كلية من السطر $C_j$-$Z_j$ فيشير إلى عدم إمكانية تخفيض ( التكاليف ) وهذا يعني التوصل للحل الأمثل.

وفي المثال أعلاه يلاحظ وجود أعداد موجبة في الصف $C_j$-$Z_j$ مما يشير إلى أن الحل عند هذه الخطوة ليس بالحل الأمثل.

5- **دخول ومغادرة المتغيرات:** مادام البحث عن الحل الأمثل يجري عن طريق تحسين الحل الممكن الجاري فإن متغيرا آخر أكثر مساهمة في ربح الوحدة الواحدة أو (الأقل كلفة ) يمكن أن يدخل في عمود ( المتغيرات الأساسية ) المبينة في الجدول ويغادر احد المتغيرات الموجود في العمود المذكور الأقل ربحية أو (الأكثر كلفة ) من المتغير الداخل وبهذا يحل التغير الداخل محل الخارج). إن تحديد المتغير

الداخل واضح من دالة الهدف فالمتغير الأكثر مساهمة في الربحية للوحدة الواحدة في مثالنا أعلاه هو $x_2$ لأنه يساهم بمقدار (3) في حين يساهم $x_1$ بـ (2) فقط في خلق الربح أما المتغير الخارج فيتحدد عن طريق قسمة قيمة كل من المتغيرات الموجود في عمود ( المتغيرات الأساسية ) على ما يقابلها من عناصر العمود الذي سيدخل. وفي المثال أعلاه تتم العمليات كالآتي:

الصف: $S_1 = \frac{8}{5} = 1.6$

الصف: $S_2 = \frac{16}{4} = 4$

ويظهر أن المتغير $S_1$ هو الذي يغادر لكونه الأقل نسبة من $S_2$.

6- **إعادة احتساب الجدول:** وبعد إن يتقرر إدخال $X_2$ وخروج $S_1$ تجري العمليات الآتية لإعادة احتساب مكونات الجدول.



أ- قسمة جميع عناصر الصف المغادر ($S_1$) على العنصر الذي يقع عند تقاطع الصف $S_1$ والعمود الداخل $X_2$ وهو $a_{12}$ وقد حوط بدائرة كما مبين في الجدول (5-2) ويسمى هذا العنصر بالمحور ( pivot ) لكونه أصبح محوراً تستند عليه جميع الحسابات التي ستجري في الجدول وفي هذه المرحلة لابد من جعل قيمته تساوي (1) أي بقسمة عناصر الصف $(S_1)$ على ($a_{12}$=5) فنحصل على:

الصف الداخل: $X_2 = \frac{8}{5} \quad \frac{1}{5} \quad 1 \quad \frac{1}{5} \quad 0 \quad 3$

**ب-** إعادة احتساب الصفوف الأخرى بطريقة مشابهة لطريقة استخراج معكوس المصفوفة أي احتساب كل عنصر من عناصر الصفوف الأخرى وفق الأسلوب الآتي:

(عنصر الصف الجديد) = (عنصر الصف السابق) - (عنصر الصف السابق في العمود الداخل) (العنصر المقابل في الصف الداخل)

إن الهدف من هذه العمليات هو جعل قيمة العناصر فوق وأسفل العنصر (المحور) تساوي صفراً حسبما تتطلبه طريقة احتساب معكوس المصفوفة.

وفي المثال أعلاه تتطلب هذه العملية إعادة احتساب الصف $S_2$ والصف $C_j$-$Z_j$ وفق ما تقتضيه العمليات المذكور وكما يأتي:

كيف نجعل العدد (4) في الصف $S_2$ يساوي صفرا ؟ وهنا لابد من العودة إلى القاعدة (ب) أعلاه فنحصل على:

يكون عنصر الصف الجديد في $S_2$ أسفل المحور صفرا إذا ضربنا المحور بالعدد (4) وطرحنا الناتج من العنصر السابق في الصف $S_2$ وهو (4) أي أن: $4-(4)(1)=0$ ونقوم بمعالجة عناصر الصف $S_2$ الأخرى نفس المعاملة أي أن هذه العناصر تستخرج كما يأتي:

$$(16)-(4)(\frac{8}{5})=\frac{48}{5}$$

$$(6)-(4)(\frac{1}{5})=\frac{26}{5}$$

$$(0)-(4)(\frac{1}{5})=-\frac{4}{5}$$

$$(1)-(4)(0)=1$$

$$(27)-(4)(3)=15$$

ونقوم بإدخال هذه البيانات في الجدول كقيم جديدة للصف $S_2$ ثم نقوم باحتساب الصف $C_j$-$Z_j$ بنفس القاعدة (ب) ونقول:

كيف نجعل العدد(3) في الصف $C_j$-$Z_j$ يساوي صفراً ؟

يكون عنصر الصف $c_j - z_j$ أسفل المحور يساوي صفرا أذا ضربنا المحور بالعدد (3) وطرحنا الناتج من العنصر السابق في الصف $c_j - z_j$ أي أن:

$$3 - 3(1) = 0$$

وبمعالجة عناصر الصف الأخرى بنفس الأسلوب نحصل على:

$$(0)-(3)(\frac{8}{5}) = -\frac{24}{5}$$

$$(2)-(3)(\frac{1}{5}) = \frac{7}{5}$$

$$(0)-(3)(\frac{1}{5}) = -\frac{3}{5}$$

$$(0)-(3)(0) = 0$$

$$(5)-(3)(3) = -4$$



والآن لندخل هذه البيانات في الجدول فنحصل على المرحلة الأولى منه كما يأتي:

| $CB_i$ | B | V | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | Check |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | $x_2$ | $\frac{8}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | 1 | $\frac{1}{5}$ | 0 | 3 |
| 0 | $s_2$ | $\frac{48}{5}$ | $\frac{26}{5}$ | 0 | $-\frac{4}{5}$ | 1 | 15 |
| | $C_j - Z_j$ | $-\frac{24}{5}$ | $\frac{7}{5}$ | 0 | $-\frac{3}{5}$ | 0 | -4 |

الآن نعود للخطوة (4) وندقق هل تم التوصل إلى الحل الأمثل أم نحن في الطريق إليه والجواب يأتينا من خلال استعراض عناصر الصف $c_j$-$z_j$ وهل لازالت هناك عناصر موجبة فيه (من غير الصفر). نعم العدد $(\frac{7}{5})$ فهو عدد موجب على الأقل من بين

الأعداد الموجودة في الصف ذات الإشارة السالبة. إذن لابد من مواصلة الحل والاستعانة بالخطوة (5) ومنها نستنتج بأن:

المتغير المرشح للدخول هو $x_1$ لكونه يأتي بعد $x_2$ الذي سبق وأن دخل من حيث المساهمة في (الربح) كما أنه في الجدول الحالي يقع في رأس العمود الذي يقع فيه العنصر الموجب الوحيد الذي ذكرناه وهو $\frac{7}{5}$ لذلك فهو المرشح الوحيد للدخول وعليه فإن العمود الداخل هو $x_1$. أما المتغير الخارج فيمكن التعرف عليه من خلال قسمة عمود القيمة على عناصر العمود الذي سيدخل كل حسبما يقابله أي أن:

الصف: $X_2 = \frac{\frac{8}{5}}{\frac{1}{5}} = \frac{8}{5} \times \frac{5}{1} = 8$

الصف: $S_2 = \frac{\frac{48}{5}}{\frac{26}{5}} = \frac{48}{5} \times \frac{5}{26} = \frac{24}{13}$

إذن الصف $s_2$ هو الذي سيغادر لكونه الأقل نسبة ، وان $x_2$ سيمكث.

**والآن نعيد احتساب الجدول:**

حيث انه الصف المغادر $s_2$ والعمود الداخل $x_1$ يتقاطعا عند العنصر $(\frac{26}{5})$ لذلك يكون هذا العنصر هو المحور وعليه نقوم بتحويله غالى (1) صحيح وذلك بضربه بـ $\left(\frac{5}{26}\right)$ كما نضرب بقية عناصر الصف $s_2$ بـ $(\frac{5}{26})$ أيضاً.

كما نقوم بتحويل العنصرين أعلى وأسفل المحور إلى (صفراً) ومعاملة عناصر الصف الذي ينتمي له كل واحد من هذين العنصرين بنفس الإجراءات التي يخضع لها هذا العنصر.

الجزء الأول

وعلى هذا الأساس نحصل على جدول المرحلة الثانية الآتي:

| $CB_i$ | B | V | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | Check |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | x2 | $\frac{16}{13}$ | 0 | 1 | $\frac{3}{13}$ | $-\frac{1}{26}$ | $\frac{63}{26}$ |
| 2 | x1 | $\frac{24}{13}$ | 1 | 0 | $-\frac{2}{13}$ | $\frac{5}{26}$ | $\frac{75}{26}$ |
| | $C_j$-$Z_j$ | $-\frac{96}{13}$ | 0 | 0 | $-\frac{5}{13}$ | $-\frac{7}{26}$ | $-\frac{209}{26}$ |

والآن يلاحظ أن جميع الأعداد الموجبة في الصف $C_j$-$Z_j$ قد اختفت أي عدم وجود عدد موجب ( ما عدا الأصفار ) مما يشير إلى التوصل للحل الأمثل وهو:

$$X_1 = \frac{24}{13}, X_2 = \frac{16}{13}, Z = \frac{96}{13}$$

والآن ودعنا نعيد تجميع أجزاء الحل في جدول واحد لحاجتنا إلى ذلك في تثبيت بعض الملاحظات المفيدة وتلخيص خطوات الحل:



| | | $C_j$ | 2 | 3 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $CB_i$ | B | V | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | Check |
| 0 | $s_1$ | 8 | 1 | 5 | 1 | 0 | 15 |
| 0 | $s_2$ | 16 | 6 | 4 | 0 | 1 | 27 |
| | $C_j$-$Z_j$ | 0 | 2 | 3 | 0 | 0 | 5 |
| 3 | $x_2$ | $\frac{8}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | 1 | $\frac{1}{5}$ | 0 | 3 |
| 0 | $s_2$ | $\frac{48}{5}$ | $\frac{26}{5}$ | 0 | $-\frac{4}{5}$ | 1 | 15 |
| | $C_j$-$Z_j$ | $-\frac{24}{5}$ | $\frac{7}{5}$ | 0 | $-\frac{3}{5}$ | 0 | -4 |
| 3 | $x_2$ | $\frac{16}{13}$ | 0 | 1 | $\frac{3}{13}$ | $-\frac{1}{26}$ | $\frac{63}{26}$ |
| 2 | $x_1$ | $\frac{24}{13}$ | 1 | 0 | $-\frac{2}{13}$ | $\frac{5}{26}$ | $\frac{75}{26}$ |

| $C_j-Z_j$ | $-\frac{96}{13}$ | 0 | 0 | $-\frac{5}{13}$ | $-\frac{7}{26}$ | $-\frac{209}{26}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|

$$\therefore x_1 = \frac{24}{13}, x_2 = \frac{16}{13}, z = \frac{96}{13}$$

ملاحظات مهمة بشان خطوات الحل (م خ ح )

1- تضاف المتغيرات الإضافية ( slack Variables) إلى القيود المتباينة من أجل تحويلها إلى قيود متعادلة فإذا كان القيد يحمل علامة أكبر ويساوي ($\geq$) يطرح منه المتغير الإضافي وإذا كان يحمل علامة أصغر أو يساوي ($\leq$) يضاف إليه المتغير الإضافي وعلاوة على ذلك تضاف متغيرات إضافية مقابلة إلى دالة الهدف تحمل معاملات تساوي صفراً.

2- تمثل عناصر جدول السمبلكس سواء مصفوفة النموذج أو المصفوفة المحايدة معدل الاستبدال الحدي بين المتغيرات الموجودة في الحل والمتغيرات الموجودة على رأس أعمدة الجدول. فعلى سبيل المثال إذا نظرنا إلى الدورة الأولى من الجدول نجد أن $s_1$ يتناقص بمقدار $(\frac{26}{5})$ إذا أضفنا وحدة واحدة من $x_1$ ويتزايد $S_2$ بمقدار $\frac{4}{5}$ إذا أضيفت وحدة واحدة من $S_1$ وهكذا مع ملاحظة أن معدل الاستبدال الحدي للمتغير مع نفسه يساوي ( 1 ) كما أن معدل الاستبدال الحدي للمتغير مع متغير لا يستبدل به يساوي صفراً.

3- إن مصفوفة النموذج في الجدول الابتدائي تصبح في الدورة الأخيرة للحل مصفوفة محايدة وتصبح المصفوفة المحايدة في الجدول الابتدائي معكوس مصفوفة النموذج الابتدائية في الدورة الأخيرة للحل.

4- تحتوي الدورة النهائية للحل على قيمة ($C_j - Z_j$) والتي تساوي صفرا أو قيمة سالبة في حالة تعظيم الدالة أو صفرا أو قيمة موجبة في حالة إقلال الدالة وهي قيمة Z المبحوث عنها ويمكن التخلص من الإشارة السالبة بجعل النتيجة ($Z_j - C_j$) في حالة تعظيم الدالة.

5- يتحدد المتغير الداخل من خلال دالة الهدف فأعلى مساهم في الربحية للوحدة الواحدة في حالة تعظيم الدالة يدخل إلى عمود (المتغيرات الأساسية) واصغر مساهم في التكاليف للوحدة الواحدة في حالة تقليل الدالة هو الذي يداخل إلى عمود (المتغيرات الأساسية).

6- يتحدد المتغير المغادر من خلال قسمة عناصر عمود القيمة على العناصر المقابلة في العمود الداخل فالنسبة الأصغر تؤشر المتغير المغادر.

7- يكون العنصر الذي يقع عند تقاطع عمود المتغير الداخل مع صف المتغير المغادر هو المحور (pivot).

8- تحول قيمة المحور إلى ( 1 ) صحيح بالضرب أو القسمة على عدد معين أما بقية عناصر الصف الذي يقع فيه المحور فتضرب أو تقسم على نفس العدد المذكور.

9- تجري نفس عمليات استخراج معكوس المصفوفة على صفوف مصفوفة الجدول أي تحول العناصر الموجودة في عمود المتغير الداخل فوق وتحت المحور إلى أصفار وذلك بضرب أو قسمة المحور ( بعد أن أصبح ( 1 ) صحيح ) على عدد معين مناسب وطرح ذلك من العنصر المراد جعل قيمته صفراً. وتجري نفس العمليات المذكورة على العناصر الأخرى لصف المحور والصف الذي أصبحت قيمة صفراً.



10- بعد إكمال أي دورة من دورات الحل نتفحص فيما إذا بلغنا الحل الأمثل أم مازلنا نحتاج لدورات أخرى وذلك من خلال تدقيق عناصر السطر ( $C_j - Z_j$ ) وكما يلي:

أ- في حالة تعظيم الدالة ندقق عناصر الصف ( $C_j - Z_j$ ) ماعدا قيمة Z في عمود القيم (v) فإذا كان هناك عنصر موجب واحد على الأقل نواصل الحل وفي خلاف ذلك نكون قد توصلنا للحل الأمثل.

ب- في حالة تقليل الدالة نتفحص عناصر الصف ( $C_j - Z_j$ ) ماعدا قيمة Z من عمود القيم (V) فإذا كان هناك عنصر سالب واحد على الأقل نواصل الحل وفي خلاف ذلك نكون قد توصلنا للحل الأمثل.

وبعد هذا التلخيص لخطوات الحل دعنا نأخذ مثالاً إيضاحياً لبرنامج يحتوي هـذه المرة على أكثر من متغيرين:

مثال(2):

جد الحل الأمثل للنموذج الآتي:

$$\max.\ z = 3x_1 + 5x_2 + 3x_3$$

$$s.t.$$

$$2x_1 + 3x_2 + 6x_3 \le 50$$

$$3x_1 + 4x_2 + x_3 \le 40$$

$$3x_1 + 5x_2 + 2x_3 \le 20$$

$$x_1 \ge 0\ ,\ \ x_2 \ge 0\ ,\ x_3 \ge 0$$

الجواب:

نحول المتباينات إلى معادلات وندخل النموذج في الجدول الابتدائي وكما يأتي:

| | | $C_j$ | 3 | 5 | 3 | 0 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $CB_i$ | B | V | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | Check |
| 0 | $s_1$ | 50 | 2 | 3 | 6 | 1 | 0 | 0 | 62 |
| 0 | $s_2$ | 40 | 3 | 4 | 1 | 0 | 1 | 0 | 49 |
| 0 | $s_3$ | 20 | 3 | 5 | 2 | 0 | 0 | 1 | 31 |
| | $C_j$-$Z_j$ | 0 | 3 | 5 | 3 | 0 | 0 | 0 | 11 |

ويبدو أننا بدأنا العمليات بحل ممكن وهو $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ وبذلك تكون المتغيرات الإضافية في عمود المتغيرات الأساسية ( B ): $S_1 = 50$ , $S_2 = 40$ , $S_3 = 20$ وتكون قيمة **Z = 0** ثم نعين المتغير الداخل وهو $X_3$ لان مساهمته في تعظيم الدالة = **5** في حين تبلغ مساهمة كل من: $x_3 = 3$ , $x_1$. أما المتغير الخارج فيتحدد بقسمة عناصر عمود القيمة = $\begin{bmatrix} 50 \\ 40 \\ 20 \end{bmatrix}$ على العناصر المقابلة في عمود المتغير الداخل = $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ فنحصل على العمود $\begin{bmatrix} \frac{50}{3} \\ 10 \\ 4 \end{bmatrix}$ ويظهر أن النسبة الأصغر هي ( **4** ) وبذلك فإن $S_3$ هو المتغير الذي يغادر. ومن النتائج أعلاه يتحدد المحور بتقاطع عمود المتغير الداخل وسطر المتغير المغادر وذلك عند العنصر ( 5 ) المؤشر حوله بدائرة.

الفصل الخامس

وبعد تحديد المحور نقوم بالعمليات المذكورة في الفقرتين ( 8 , 9 ) من خطوات العمل الآتي:

أ- نجعل قيمة المحور تساوي ( 1 ) وذلك بقسمته على ( 5 ) وبنفس الوقت نقسم بقية عناصر الصف على ( 5 ) أيضا فينتج الصف الآتي:

$$= (4 \quad \frac{3}{4} \quad 1 \quad \frac{2}{5} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{5} \mid \frac{31}{5})$$

ب- نجعل قيمة كل عنصر أسفل وأعلى المحور صفراً وكما يلي:

**الصف الأول**: نضرب المحور الذي أصبحت قيمته (1) في (3) ونطرح النتيجة من العنصر (3) الموجود في الصف الأول. ونقوم بنفس العملية بالنسبة لعناصر الصف الأول الآخر.

**الصف الثاني:** نضرب المحور الذي أصبحت قيمته (1) في (4) ونطرح النتيجة من العنصر (4) الموجود في الصف الثاني. ونقوم بنفس العملية بالنسبة لعناصر الصف الثاني الأخرى.

**الصف الرابع:** نضرب المحور الذي أصبحت قيمته (1) في (5) ونطرح النتيجة من العنصر (5) الموجود في الصف الرابع. ونقوم بنفس العملية بالنسبة لعناصر الصف الرابع الأخرى.

وبذلك نحصل على الجدول الآتي يمثل الدورة الأولى من الحل:

| B | V | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | Check |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $s_1$ | 38 | $\frac{1}{5}$ | 0 | $\frac{24}{5}$ | 1 | 0 | $-\frac{3}{5}$ | $\frac{217}{5}$ |
| $s_2$ | 24 | $\frac{3}{5}$ | 0 | $-\frac{3}{5}$ | 0 | 1 | $-\frac{4}{5}$ | $\frac{121}{5}$ |
| $x_2$ | 4 | $\frac{3}{5}$ | 1 | $\frac{2}{5}$ | 0 | 0 | $\frac{1}{5}$ | $\frac{31}{5}$ |
| $C_j$-$Z_j$ | -20 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | -1 | -20 |

ونعود للفقرة (10) من (م خ ح) ونتساءل هل توصلنا للحل الأمثل - ويكون الجواب كلا. لان الفقرة (10/ أ ) تشير إلى وجود <u>عنصر موجب</u> (ماعدا الصفر) في الصف ($C_j$-$Z_j$) وهو العدد (1) في العمود $x_3$. إذن لابد من الاستمرار بالعمل:

وحيث أن $x_1$،$x_3$ مرشحين للدخول لأنهما يساهمان بالتساوي في تعظيم الدالة ولكن $x_3$ هو الذي سيدخل لان <u>العنصر الموجب</u> يقع في العمود الذي يقع في العمود الذي يقع على رأسه $x_3$ بينما يقع $x_1$ على رأس العمود الذي تبلغ قيمه هذا العنصر (5) ولهذا فهو غير معني بمسألة العنصر الداخل. أما المتغير المغادر فيتحدد حسب الفقرة (6) وهو $s_1$ لان نسبته المطلقة هي الأقل وبذلك يكون المحور() $\frac{24}{5}$. ونبدأ بتكوين جدول الدورة الثانية حسب الفقرتين (8،9) من خطوات الحل (م خ ح) وكالآتي:

| B | V | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | check |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_3$ | $\frac{95}{12}$ | $\frac{1}{24}$ | 0 | 1 | $\frac{5}{24}$ | 0 | $-\frac{1}{8}$ | $\frac{217}{24}$ |
| $s_2$ | $\frac{115}{4}$ | $\frac{5}{8}$ | 0 | 0 | $\frac{1}{8}$ | 1 | $-\frac{7}{8}$ | $\frac{237}{8}$ |
| $x_2$ | $\frac{5}{6}$ | $\frac{7}{12}$ | 1 | 0 | $-\frac{1}{12}$ | 0 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{31}{12}$ |
| $C_j - Z_j$ | $-\frac{335}{12}$ | $-\frac{1}{24}$ | 0 | 0 | $-\frac{5}{24}$ | 0 | $-\frac{7}{8}$ | $-\frac{697}{24}$ |

والآن نعود للتدقيق عما إذا توصلنا للحل الأمثل أم لا. ومن ملاحظة الصف $C_j$-$Z_j$ نلاحظ أن جميع القيم أصبحت سالبة و لا توجد قيمة موجبة



( ماعدا الأصفار) إذن توصلنا للحل الأمثل وهو:

$$x_1 = 0, x_2 = \frac{5}{6}, x_3 = \frac{95}{12}, z = \frac{335}{12}$$

تنويه:

بعد أن أصبحت خطوات الحل واضحة صار بالإمكان حل أي برنامج خطي يوجد له حل مباشرة في جدول موحد، ولكن لازالت أمامنا عقبة لابد من تذليلها وتتلخص في كيفية معالجة البرنامج من النوع الذي يحتوي على قيود تحمل إشارة اكبر أو يساوي صفر ($\geq$). فكما ذكرنا سابقاً أن تحويل القيد من هذا النوع من المتباينة إلى المعادلة يتطلب طرح متغير إضافي من الجانب الأيسر فإذا كان لدينا القيد الآتي:

$$2x_1 + 4x_2 + x_3 \geq 15$$

فإن تحويله إلى معادلة يتطلب طرح متغير إضافي مثل $s_1$ منه ليكون بالصورة الآتية:

$$2x_1 + 4x_2 + x_3 - s_1 = 15$$

إذن حدثت لدينا مشكلة بوجود ($-s_i$) والتي لم تكن موجودة عندما كنا نضيف متغيرات إضافية إلى الجانب الأيسر من المتباينة التي من النوع ($\leq$) كي تحول إلى معادلة.

ولتوضيح هذه المشكلة وكيفية معالجتها نأخذ مثالاً إيضاحيا مرافقاً للشروحات وخطوات العمل التالية:

مثال(3):

أوجد الحل الأمثل للبرنامج الخطي الآتي:

$$\min Z = 2x_1 + x_2$$

$$s.t.$$

$$3x_1 + x_2 \geq 3$$

$$4x_1 + 3x_2 \geq 6$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 2$$

$$x_1 \geq 0 \ , x_2 \geq 0$$

لغرض تحويل المتباينات إلى معادلات نطرح متغيرات مضافة من الجانب الأيسر. ليصبح النموذج كالآتي:

$$3x_1 + x_2 - s_1 = 3$$

$$4x_1 + 3x_2 - s_2 = 6$$

$$x_1 + 2x_2 - s_3 = 2$$

$$x_1 \geq 0 \ , x_2 \geq 0$$

$$s_1 \geq 0 , s_2 \geq 0 \ , s_3 \geq 0$$

والآن إذا بدأنا في البحث عن حل أساسي ابتدائي سنجد أمامنا الحل التالي:

وهو: $x_1 = x_2 = 0$ , $s_3 = -2$, $s_2 = -6$ , $s_1 = -3$ وهو من الحلول غير الممكنة ولكنه لا يفي بمتطلبات $s_1, s_2, s_3 \geq 0$.

ولهذا لابد من التفتيش عن وسيلة تخرجنا من هذا المأزق.

لقد نصح المعنيون بالبرمجة الرياضية استخدام الوسيلة الآتية لمعالجة هذه القضية وذلك بابتداع متغيرات أخرى وإضافتها إلى البرنامج وقد سموها بالمتغيرات المصطنعة (**artificial variables**) ودعنا نرمز لها بالحرف (a) وبهذا يمكن إعادة صياغة قيود النموذج بما يلي:

$$3x_1 + x_2 - s_1 + a_1 = 3$$

$$4x_1 + 3x_2 - s_2 + a_2 = 6$$

$$x_1 + 2x_2 - s_3 + a_3 = 2$$

وبذلك يكون الحل الممكن الأساسي الذي نبدأ به هو $x_1 = x_2 = 0$

و $a_1 = 3, a_2 = 6, a_3 = 2, s_1 = s_2 = s_3 = 0$

الفصل الخامس

ومن الواضح أن مهمتنا ليست استخراج قيم المتغيرات المصطنعة بل حل النموذج ولا يهم إذا ما ظهرت بعض من المتغيرات المصطنعة في بعض الحلول الممكنة ونحن في طريقنا للحل الأمثل بشرط لا تكون قيمتها صفراً

في الحل النهائي:

والآن: ندخل إلى البرنامج دالة هدف مصطنعة إضافية تحتوي على المتغيرات المصطنعة فقط وحسب الصيغة الآتية:

$$G = M(a_1 + a_2 + a_3)$$

ونعطي M قيمة عالية جداً لا تضاهيها قيمة لأي عدد يتوقع ظهوره خلال عمليات الحل. ولابد من تثبيت الملاحظات الآتية بشأن العلاقة بين المتغيرات المصطنعة والبرنامج الأصلي:

1- إذا كان هناك حل للبرنامج الأصلي فإننا نجده عند إنجاز حل البرنامج المعدل وسنجد أيضاً عدم وجود متغيرات مصطنعة موجبة في الحل النهائي.

2- إذا احتوى الحل الأمثل للبرنامج لمعدل على متغيرات مصطنعة موجبة فهذا يعني احتواء البرنامج الأصلي على قيود غير متجانسة ولهذا لا يوجد له حل.

3- إذا كان هدف الدالة التعظيم فإن المتغيرات المصطنعة التي ستدخل تأخذ معاملات سالبة أي (-M) وإذا كانت التقليل تكون المعاملات (+M) مع ملاحظة عدم الحاجة لإدخال (-M) في حالات معينة إذا كان الجانب الأيمن (جانب قيم) للقيد يحمل إشارة سالبة فمثلاً إذا كان القيد الأول يساوي (-3) فهنا يكون $s1 = 3$ ويكون ضمن المتغيرات الأساسية التي نبدأ بها.

4- عندما يصبح أي من المتغيرات المصطنعة غير أساسي ( أي صفراً)

نستطيع حذفه من العمليات الملاحقة ولكن ينبغي الانتباه بعد حذفه إذا كان متغيراً أساسياً ذو قيمة تساوي صفراً وإلا سنواجه نقصاً في عدد المتغيرات الأساسية المطلوبة.

والآن نعود إلى مثالنا أعلاه وندخل المعلومات في الجدول ونجري العمليات اللازمة لنحصل على الحل الأمثل وكما يلي:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $C_j^*$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | | | $C_j$ | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | |
| $CB_i^*$ | $CB_i$ | B | V | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | check |
| 1 | 0 | $a_1$ | 3 | (3) | 1 | -1 | 0 | 0 | 6 |
| 1 | 0 | $a_2$ | 6 | 4 | 3 | 0 | -1 | 0 | 12 |
| 1 | 0 | $a_3$ | 2 | 1 | 2 | 0 | 0 | -1 | 4 |
| | | $C_j-Z_j$ | 0 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 3 |
| | | $C_j^*-G_j$ | -11 | -8 | -6 | 1 | 1 | 1 | -22 |
| | | $x_1$ | 1 | 1 | $\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{3}$ | 0 | 0 | 2 |
| | | $a_2$ | 2 | 0 | $\frac{5}{3}$ | $\frac{4}{3}$ | -1 | 0 | 4 |
| | | $a_3$ | 1 | 0 | $\frac{5}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | 0 | -1 | 2 |
| | | $C_j-Z_j$ | -2 | 0 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | 0 | 0 | -1 |
| | | $C_j^*-G_j$ | -3 | 0 | $-\frac{10}{3}$ | $-\frac{5}{3}$ | 1 | 1 | -6 |
| | | $x_1$ | $\frac{4}{5}$ | 1 | 0 | $-\frac{2}{5}$ | 0 | $\frac{1}{5}$ | $\frac{8}{5}$ |
| | | $a_2$ | 1 | 0 | 0 | 1 | -1 | 1 | 2 |
| | | $x_2$ | $\frac{3}{5}$ | 0 | 1 | $-\frac{1}{5}$ | 0 | $-\frac{(3)}{5}$ | $\frac{6}{5}$ |
| | | $C_j-Z_j$ | $-\frac{11}{5}$ | 0 | 0 | $\frac{3}{5}$ | 0 | $\frac{1}{5}$ | $-\frac{7}{5}$ |
| | | $C_j^*-G_j$ | -1 | 0 | 0 | -1 | 1 | -1 | -2 |
| | | $x_1$ | $\frac{3}{5}$ | 1 | 0 | $-\frac{3}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | 0 | $\frac{6}{5}$ |
| | | $s_3$ | 1 | 0 | 0 | 1 | -1 | 1 | 2 |
| | | $x_2$ | $\frac{6}{5}$ | 0 | 1 | $-\frac{2}{5}$ | $\frac{3}{5}$ | 0 | $\frac{12}{5}$ |
| | | $C_j-Z_j$ | $-\frac{12}{5}$ | 0 | 0 | $\frac{2}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | 0 | $-\frac{9}{5}$ |
| | | $C_j^*-G_j$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

وهنا انتهى الصف $C_j^* - G_j$ وأصبحت جميع عناصره أصفارا كما أن الصف $C_j - Z_j$ أصبحت جميع عناصره أعدادا موجبه.

إذن توصلنا للحل الأمثل هو:

$$x_1 = \frac{3}{5}, x_2 = \frac{6}{5}), x_3 = 0, s_1 = 0, s_2 = 0, s_3 = 1, z = \frac{12}{5}$$

<u>ملاحظات هامة</u>

هناك بعض الملاحظات الأساسية على جدول السمبلكس أعلاه والتي تفيد في إيضاح وتفسير خطوات الحل وهي:

1- يحتوي الصف $c_j^*$ على معاملات دالة الهدف المصطنعة الموجودة في دالة الهدف الأصلية. وحيث لا وجود لهذه المعاملات في الدالة الأصلية فإن جميع قيم $c_j^*$ تساوي صفراً.

2- أما العمود $CB_i^*$ فيحتوي على معاملات المتغيرات المصطنعة في دالة الهدف وهي كما ذكرنا تساوي (M) وحيث أن الخطوات الأولى من الحل تهدف الوصول إلى حل ممكن أساسي من الحلول الممكنة الأساسية تمهيداً لمواصلة الحل حتى بلوغ الحل الأمثل، أي باستبعاد المتغيرات المصطنعة من جدول السمبلكس تباعاً.لذلك لا حاجة لإرباك الجدول بعمليات و أعداد تحتوي على (M) وبالمستطاع تعويض (M) بعدد صغير ومناسب كالعدد (1) كي يساعد على أجراء العمليات الحسابية داخل الجدول مع الإبقاء في الذهن أن معاملات المتغيرات المصطنعة هي عدد كبير جداً لا يضاهيه عدد يتوقع ظهوره خلال الحل. وحيث أن جميع المعاملات المذكورة تساوي (M) لهذا نلاحظ ظهور هذه المعاملات في العمود $CB_i^*$ بصيغة العدد (1) بدلاً من (M).

3- أما الصف $C_j^*-C_j$ فيحتوي على قيمة دالة الهدف بإشارة سالبة وهي:

$$-G = 1(3) + 1(6) + 1(2) = 11$$

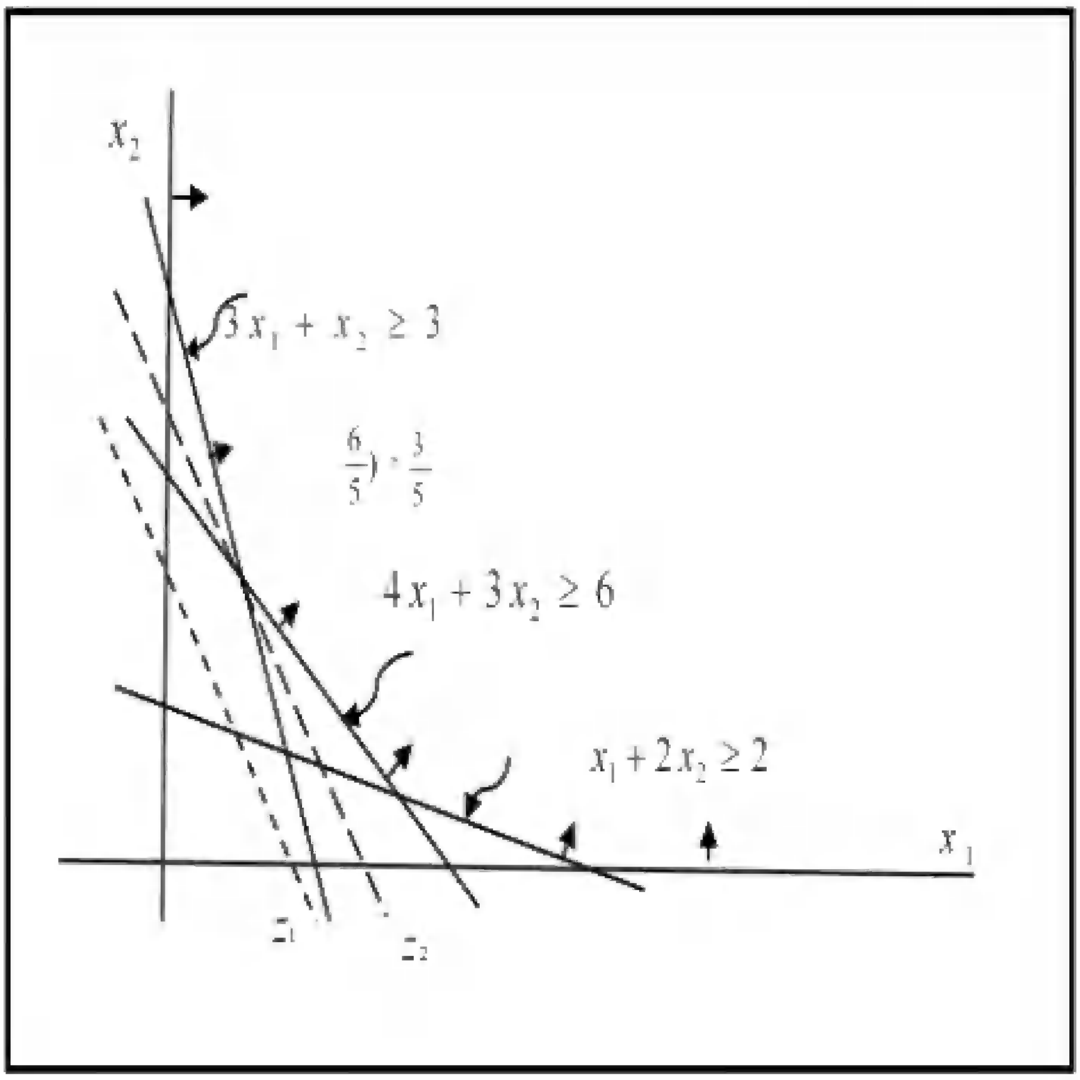
$$\therefore G = -11$$

أما بقية عناصر الصف فهي المجموع العمودي للمعاملات المقابلة للمتغيرات المصطنعة الموجودة في عمود المتغيرات الأساسية بإشارة سالبة فعلى سبيل المثال نلاحظ في العمود الأول $(-(3+4+1)=-8)$ وهكذا.

4- أما بقية مكونات الجدول فقد مر شرحها سابقاً.

والآن فقد أصبحت خطوات العمل في الحالة الجديدة كافية لتناول مثالاً أخر وقبل الشروع بذلك دعنا نتفحص المثال أعلاه بطريقة أخرى وهي طريقة الرسم البياني والذي يوصلنا إلى الحل الأمثل نفسه. والمبين في الشكل رقم (5-5):






شكل رقم (5-5)

لنأخذ هذا المثال:

مثال(4):

حل البرنامج الخطي الآتي:

$$\min Z = x_1 + x_2$$

$$s.t.\quad 3x_1 + x_2 \le 7$$

$$2x_1 + 3x_2 \ge 4$$

$$4x_1 + 2x_2 \ge 5$$

$$x_1 \ge 0 \ , x_2 \ge 0$$

الجواب:

عند استعراض المسالة أعلاه نلاحظ أن القيد الثاني والثالث يحمل علامة اكبر أو يساوي ($\ge$) بينما يحمل القيد الأول علامة اصغر أو يساوي($\le$) إذن لابد من معالجة القيدين الثاني والثالث بطريقة إضافة متغيرات مصطنعة علاوة على المتغيرات الإضافية وكالآتي:

$$3x_1 + x_2 + s_1 = 7$$

$$2x_1 + 3x_2 - s_2 + a_1 = 4$$

$$4x_1 + 2x_2 - s_3 + a_2 = 5$$

كما نستحدث دالة هدف مصطنعة بالصيغة الآتية: $G = a_1 + a_2$ وندخل البيانات في جدول السمبلكس ونباشر الحل فنحصل على:

الجزء الأول

| $CB_i^*$ | $CB_i$ | B | V | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | Check |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $c_j^*$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | | | $c_j$ | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | |
| 0 | 0 | $s_1$ | 7 | 3 | 1 | 1 | 0 | 0 | 12 |
| 1 | 0 | $a_1$ | 4 | 2 | 3 | 0 | -1 | 0 | 8 |
| 1 | 0 | $a_2$ | 5 | **4** | 2 | 0 | 0 | -1 | 10 |
| | | $C_j\text{-}Z_j$ | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| | | $C_j^*\text{-}G_j$ | -9 | -6 | -5 | 0 | 1 | 1 | -18 |
| | | $S_1$ | $\frac{13}{4}$ | 0 | $-\frac{1}{2}$ | 1 | 0 | $\frac{3}{4}$ | $\frac{9}{2}$ |
| | | $a_1$ | $\frac{3}{2}$ | 0 | **2** | 0 | -1 | $\frac{1}{2}$ | 3 |
| | | $x_1$ | $\frac{5}{4}$ | 1 | $\frac{1}{2}$ | 0 | 0 | $-\frac{1}{4}$ | $\frac{5}{2}$ |
| | | $C_j\text{-}Z_j$ | $-\frac{5}{4}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | 0 | 0 | $\frac{1}{4}$ | $-\frac{1}{2}$ |
| | | $C_j^*\text{-}G_j$ | $-\frac{3}{2}$ | 0 | -2 | 0 | 1 | $-\frac{1}{2}$ | -3 |
| | | $s_1$ | $\frac{29}{8}$ | 0 | 0 | 1 | $-\frac{1}{4}$ | $\frac{7}{8}$ | $\frac{21}{4}$ |
| | | $x_2$ | $\frac{3}{4}$ | 0 | 1 | 0 | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{3}{2}$ |
| | | $x_1$ | $\frac{7}{8}$ | 1 | 0 | 0 | $\frac{1}{4}$ | $-\frac{3}{8}$ | $\frac{7}{8}$ |
| | | $C_j\text{-}Z_j$ | $-\frac{13}{8}$ | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ | $-\frac{5}{4}$ |
| | | $C_j^*\text{-}G_j$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

إذن الحل الأمثل هو:

$$x_1 = \frac{7}{8}, x_2 = \frac{3}{4}, s_1 = \frac{29}{8}, z = \frac{13}{8}$$

ويلاحظ هنا أنا أسقطنا من حسابات الجدول الصف $C_j - G_j$ لان جميع عناصره أصبحت أصفارا الأمثلية وبذلك تحول الجدول إلى الجدول سمبلكس اعتيادي وما علينا إلا الاستمرار في الحل وذلك بتدقيق الأمثلية من خلال الصف ولكن من حسن الصدف إن جميع عناصر الصف أصبحت قيم موجبة وهذا ينبؤنا بالتوصل إلى الحل الأمثل لان غياب الإعداد السالبة من السطر في حالة تقليل الدالة يعني بلوغ الحل الأمثل الذي نبحث عنه.

لنتناول مثالاً آخر:

<u>مثال(5):</u>جد حل البرنامج الآتي:

$$\min Z = 12x_1 + 10x_2 + 5x_3$$

$$s.t. \quad x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 2$$

$$3x_1 + x_2 + x_3 \geq 5$$

$$x_1 \geq 0 \ , x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

<u>الجواب:</u>

نستحدث دالة هدف أخرى وهي:

$$G = a_1 + a_2$$

ونضيف إلى القيود متغيرات إضافية ومتغيرات مصطنعة لتكون كالآتي:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - s_1 + a_1 = 2$$

$$3x_1 + x_2 + x_3 - s_2 + a_2 = 5$$

وندخل البرنامج بصيغته الأخيرة في جدول السمبلكس ونباشر الحل:

| $C_j^*$ | $C_j$ | B | V | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $s_1$ | $s_2$ | Check |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $C_j^*$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | | | $C_j$ | 12 | 10 | 5 | 0 | 0 | |
| 1 | 0 | $a_1$ | 2 | 1 | 2 | 1 | -1 | 0 | 5 |
| 1 | 0 | $a_2$ | 5 | | 1 | 1 | 0 | -1 | 9 |
| | | $C_j$-$Z_j$ | 0 | 12 | 10 | 5 | 0 | 0 | 27 |
| | | $C_j^*$-$G_j$ | -7 | -4 | -3 | -2 | 1 | 1 | -14 |
| | | $a_1$ | $\frac{1}{3}$ | 0 | $\frac{5}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | -1 | $\frac{1}{3}$ | 2 |
| | | $x_1$ | $\frac{5}{3}$ | 1 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | 0 | $-\frac{1}{3}$ | 3 |
| | | $C_j$-$Z_j$ | -20 | 0 | 6 | 1 | 0 | 4 | -9 |
| | | $C_j^*$-$G_j$ | $-\frac{1}{3}$ | 0 | $-\frac{5}{3}$ | $-\frac{2}{3}$ | 1 | $-\frac{1}{3}$ | -2 |
| | | $x_2$ | $\frac{1}{5}$ | 0 | $\frac{2}{5}$ | | $-\frac{3}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{6}{5}$ |
| | | $x_1$ | $\frac{8}{5}$ | 1 | 0 | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $-\frac{2}{5}$ | $\frac{13}{5}$ |
| | | $C_j$-$Z_j$ | $-\frac{106}{5}$ | 0 | 0 | $-\frac{7}{5}$ | $-\frac{18}{5}$ | $\frac{14}{5}$ | $-\frac{81}{5}$ |
| | | $C_j^*$-$G_j$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | | $x_3$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{5}{2}$ | 1 | $-\frac{3}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 3 |
| | | $x_1$ | $\frac{3}{2}$ | 1 | $-\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | 2 |
| | | $C_j$-$Z_j$ | $-\frac{41}{2}$ | 0 | $\frac{7}{2}$ | 0 | $\frac{3}{2}$ | $\frac{7}{2}$ | -12 |

إذن الحل الأمثل:

$$x_1 \frac{3}{2}, x_2 = 0, x_3 = \frac{1}{2}, z = \frac{41}{2}$$

ملاحظة:

نستطيع في حالات معينة استخدام جدول السمبلكس المصمم لحل برنامج تعظيم الدالة لإيجاد حل برنامج تقليل الدالة وذلك بتحويل القيود ذات الإشارة $(\geq)$ إلى إشارة $(\leq)$ عن طريق ضربها ب (1-).

مثال ذلك القيد الآتي:

$$2x_1 + 5x_2 \geq 7$$

يمكن تحويله إلى قيد ذي إشارة $(\leq)$ وذلك عن طريق ضربه بـ (1 - ) أي تغيير إشارات حدوده كل عكس الأخرى فيصبح القيد بالصيغة الآتية:

$$-2x_1 - 5x_2 \leq -7$$

وبذلك يمكن تفادي استخدام دالة الهدف إضافية علاوة على الاستغناء عن إضافة متغيرات مصطنعة.

ولغرض توضيح الملاحظة أعلاه دعنا نأخذ مثالاً على ذلك ونجد حله بكلا الطريقتين بهدف المقارنة وتعميق الشرح:

مثال(6):

جد حل البرنامج الآتي:

$$\min Z = 3x_1 + 2x_2$$

$$s.t. \quad 4x_1 - x_2 \geq 5$$

$$2x_1 + 3x_2 \geq 13$$

$$3x_1 + x_2 \leq 9$$

$$x_1 \geq 0 \ , x_2 \geq 0$$

الجواب:

نعيد كتابة البرنامج وذلك بتحويل القيود ذات الإشارة $\geq$ إلى $\leq$ فتصبح كالآتي:

$$\min. \quad Z = 3x_1 + 2x_2$$

$$-4x_1 + x_2 \leq -5$$

$$-2x_1 - 3x_2 \leq -13$$

$$3x_1 + x_2 \leq 9$$

$$x_1 \geq 0 \ , \ \ x_2 \geq 0$$

ثم نضيف أو نطرح متغيرات إضافية وندخل البيانات في جدول السمبكلس ونشرع في الحل:

| | | $c_j$ | 3 | 2 | 0 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $CB_i$ | B | V | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | Check |
| 0 | $s_1$ | -5 | -4 | 1 | 1 | 0 | 0 | -7 |
| 0 | $s_2$ | -13 | -2 | -3 | 0 | 1 | 0 | -17 |
| 0 | $s_3$ | 9 | 3 | 1 | 0 | 0 | 1 | 14 |
| | $C_j - Z_j$ | 0 | 3 | 2 | 0 | 0 | 0 | 5 |
| | $s_1$ | $-\frac{28}{3}$ | $-\frac{14}{3}$ | 1 | 1 | $\frac{1}{3}$ | 0 | $-\frac{38}{3}$ |
| | $x_2$ | $\frac{13}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | 0 | 0 | $-\frac{1}{3}$ | 0 | $\frac{17}{3}$ |
| | $s_3$ | $\frac{14}{3}$ | $\frac{7}{3}$ | 0 | 0 | $\frac{1}{3}$ | 1 | $\frac{25}{3}$ |
| | $C_j - Z_j$ | $-\frac{26}{3}$ | $\frac{5}{3}$ | 0 | 0 | $\frac{2}{3}$ | 0 | $-\frac{19}{3}$ |
| | $x_1$ | 2 | 1 | 0 | $-\frac{3}{14}$ | $-\frac{1}{14}$ | 0 | $\frac{19}{7}$ |
| | $x_2$ | 3 | 0 | 1 | $\frac{1}{7}$ | $-\frac{2}{7}$ | 0 | $\frac{27}{7}$ |
| | $s_3$ | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 2 |
| | $C_j - Z_j$ | -12 | 0 | 0 | $\frac{5}{14}$ | $\frac{11}{14}$ | 0 | $-\frac{79}{7}$ |

إذن الحل الأمثل هو:

$$X_1 = 2\ ,\ X_2 = 3\ ,\ Z = 12$$

والآن نعيد حل البرنامج باستخدام أسلوب إدخال دالة هدف إضافية ومتغيرات مصطنعة ويظهر البرنامج بعد إعادة صياغته كما يلي:

دالة الهدف الإضافية هي:

$$G = a_1 + a_2$$

لأن القيد الثالث ليس بحاجة لإضافة متغير مصطنع إليه. أما البرنامج فيظهر كالآتي:

$$\min.\quad Z = 3x_1 + 2x_2$$

$$s.t.$$

$$-4x_1 - x_2 - s_2 + a_2 = 5$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

$$2x_1 + 3x_2 - s_1 + a_1 = 13$$

$$3x_1 + x_2 + s_3 = 9$$

والآن ندخل المعلومات في الجدول ونبدأ الحل كما يأتي:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $c_j^*$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | | | $c_j$ | 3 | 2 | 0 | 0 | 0 | |
| $CB_i^*$ | $B_i$ | B | V | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | Check |
| 1 | 0 | $a_1$ | 5 | 4 | -1 | -1 | 0 | 0 | 7 |
| 1 | 0 | $a_2$ | 13 | 2 | 3 | 0 | -1 | 0 | 17 |
| 0 | 0 | $s_3$ | 9 | 3 | 1 | 0 | 0 | 1 | 14 |
| | | $C_j - Z_j$ | 0 | 3 | 2 | 0 | 0 | 0 | 5 |
| | | $C_j^* - G_j$ | -27 | -9 | -3 | 1 | 1 | 1 | -38 |
| | | $x_1$ | $\frac{5}{4}$ | 1 | $\frac{1}{4}$ | $-\frac{1}{4}$ | 0 | 0 | $-\frac{38}{3}$ |
| | | $a_2$ | $\frac{21}{2}$ | 0 | $\frac{7}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | -1 | 0 | $\frac{17}{3}$ |
| | | $s_3$ | $\frac{21}{4}$ | 0 | $\frac{7}{4}$ | $\frac{3}{4}$ | 0 | 1 | $\frac{25}{3}$ |
| | | $C_j - Z_j$ | $-\frac{15}{4}$ | 0 | $\frac{11}{4}$ | $\frac{3}{4}$ | 0 | 0 | $-\frac{1}{4}$ |
| | | $C_j^* - G_j$ | $-\frac{63}{4}$ | 3 | $-\frac{21}{4}$ | $-\frac{5}{4}$ | 1 | -1 | $-\frac{82}{4}$ |
| | | $x_1$ | 2 | 1 | 0 | $-\frac{3}{14}$ | $-\frac{1}{14}$ | 0 | $-\frac{19}{7}$ |
| | | $x_2$ | 3 | 0 | 1 | $\frac{1}{7}$ | $-\frac{2}{7}$ | 0 | $\frac{27}{2}$ |
| | | $s_3$ | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 2 |
| | | $C_j - Z_j$ | -12 | 0 | 0 | $\frac{5}{14}$ | $\frac{11}{14}$ | 0 | $-\frac{76}{7}$ |
| | | $C_j^* - G_j$ | 0 | 0 | 0 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | -1 | -2 |
| | | $x_1$ | 2 | 1 | 0 | $-\frac{3}{14}$ | $-\frac{1}{14}$ | 0 | $\frac{19}{7}$ |
| | | $x_2$ | 3 | 0 | 1 | $\frac{1}{4}$ | $-\frac{2}{7}$ | 0 | $\frac{27}{7}$ |
| | | $s_3$ | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 2 |
| | | $C_j - Z_j$ | -12 | 0 | 0 | $\frac{5}{14}$ | $\frac{11}{14}$ | 0 | $-\frac{76}{7}$ |
| | | $C_j^* - G_j$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

إذن الحل الأمثل هو نفسه حسب الطريقة الأولى وهو:

$$X_1 = 2 \;,\; X_2 = 3 \;,\; Z = 12$$

## تمارين ( 5-2 )

**حل البرامج الخطية الآتية:**

-1

$$\max \quad Z = X_1 + 3X_2$$
$$s.t.$$
$$2X_1 + 3X_2 \le 6$$
$$X_1 + 4X_2 \le 4$$
$$X_1 \ge 0 \;,\; X_2 \ge 0$$

-2

$$\min \quad Z = 2X_1 + 3X_2 + X_3$$
$$s.t.$$
$$X_1 + X_2 + X_3 \ge 4$$
$$2X_1 + 3X_2 + X_3 \ge 6$$
$$3X_1 + X_2 + 2X_3 \ge 8$$
$$X_1 \ge 0 \;,\; X_2 \ge 0 \;,\; X_3 \ge 0$$

-3

$$\max \quad Z = 3X_1 + 4X_2 + X_3 + X_4$$
$$s.t.$$
$$X_1 + 3X_2 + X_4 \le 4$$
$$2X_1 + X_2 \le 3$$

والجدول الآتي يبين لنا وجه المقارنة بين البرنامج الأصلي والبرنامج الثنائي:

| البرنامج الأصلي<br>Primal Program | البرنامج الثنائي<br>Dual Program |
|---|---|
| 1- تعظيم الدالة | 1- تقليل الدالة |
| 2- تقليل الدالة | 2- تعظيم الدالة |
| 3- إشارة القيد $\leq$ | 3- إشارة القيد $\geq$ |
| 4- إشارة القيد $\geq$ | 4- إشارة القيد $\leq$ |
| 5- الثوابت في القيود | 5- معاملات دالة الهدف |
| 6- معاملات دالة الهدف | 6- الثوابت في القيود |
| 7- الصف (i) من معاملات القيود | 7- العمود (i) من معاملات القيود |
| 8- إذا احتوى البرنامج على n من المتغيرات و m من القيود ( بغض النظر عن قيود عدم السلبية ) ... | 8- فإن البرنامج الثنائي يحتوي على m من المتغيرات و n من القيود(بغض النظر عن قيود عدم السلبية). |

لنأخذ مثالاً لتوضيح كيفية تحويل البرنامج الأصلي إلى برنامج ثنائي:

| البرنامج الأصلي | البرنامج الثنائي |
|---|---|
| $\min\ Z = x_1 + 3x_2$<br>$s.t.$<br>$2x_1 + x_2 \geq 7$<br>$x_1 + 3x_2 \geq 11$<br>$5x_1 + 2x_2 \geq 16$<br>$x_1 \geq 0\ ,\ x_2 \geq 0$ | $\max.\ Q = 7y_1 + 11y_2 + 16y_3$<br>$s.t.$<br>$2y_1 + y_2 + 5y_3 \leq 1$<br>$y_1 + 3y_2 + 2y_3 \leq 3$<br>$y_1 \geq 0\ ,\ y_2 \geq 0\ ,\ y_3 \geq 0$ |

ويلاحظ ما يأتي:

1- إن البرنامج الأصلي يحتوي على ثلاثة قيود في حين احتوى البرنامج الثنائي على قيدين.

2- يحتوي البرنامج الأصلي على متغيرين بينما احتوى البرنامج الثنائي على ثلاثة متغيرات.

3- بقيت قيود عدم السلبية على إشارتها المألوفة ( $\geq 0$ ).

4- أصبحت الثوابت في القيود في البرنامج الأصلي وهي ( **7 , 11 , 16** ) معاملات لدالة الهدف في البرنامج الثنائي بينما أصبحت معاملات دالة الهدف في البرنامج الأصلي وهي ( **1 , 3** ) ثوابت في قيود البرنامج الثنائي.

5- أصبحت معاملات القيد الواحد (الصف الأول ) في البرنامج الأصلي وهي $\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}$ معاملات للعمود الأول من قيود البرنامج الثنائي وكذلك بالنسبة لمعاملات الصف الثاني $\begin{bmatrix}7 & 1\end{bmatrix}$ معاملات للعمود الثاني من قيود البرنامج الثنائي. والصف الثالث $\begin{bmatrix}2 & 5\end{bmatrix}$ معاملات للعمود الثالث من قيود البرنامج الثنائي. والعكس بالعكس.



### 5-7-2 إيجاد حل البرنامج الثنائي من البرنامج الأصلي

ذكرنا سلفاً بأن قيم الحل الأمثل للبرنامج الثنائي يمكن إيجادها من قيم الحل الأمثل للبرنامج الأصلي ولتوضيح ذلك لنتناول مثالاً:

$$\max \; Z = 3X_1 + 4X_2$$

$$s.t.$$

$$X_1 + 2X_2 \leq 1$$

$$X_1 + X_2 \leq 2$$

$$X_1 \geq 0 \;\; , \; X_2 \geq 0$$

دعنا نحاول أولاً حل البرنامج الأصلي ثم حل البرنامج الثنائي وبعدئذ نجري المقارنة بين الحلين تمهيداً لتثبيت القاعدة العامة لاستخراج حل أي من البرنامجين من الأخر.

| | | $c_j$ | 3 | 4 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $CB_i$ | B | V | $x_1$ | $x_2$ | $s_3$ | $s_2$ | check |
| 0 | $s_1$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 5 |
| | | | | (2) | | | |
| 0 | $s_2$ | 2 | 1 | 1 | 0 | 1 | 5 |
| | $C_j$-$Z_j$ | 0 | 3 | 4 | 0 | 0 | 7 |
| | $x_2$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | $\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{5}{2}$ |
| | $s_2$ | $\frac{3}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | $-\frac{1}{2}$ | 1 | $\frac{5}{2}$ |
| | $C_j$-$Z_j$ | -2 | 1 | 0 | -2 | 0 | -3 |
| | $x_1$ | 1 | 1 | 2 | 1 | 0 | 5 |
| | $s_2$ | 1 | 0 | -1 | -1 | 1 | 0 |
| | $C_j$-$Z_j$ | -3 | 0 | -2 | -3 | 0 | -8 |

إذن الحل الأمثل للبرنامج الأصلي هو:

$$X_1 = 1, X_2 = 0, S_1 = 0, S_2 = 1, Z = 3$$

والآن نحول البرنامج الأصلي إلى برنامج ثنائي كالآتي:

$$\min \quad Q = y_1 + 2y_2$$

$$st. \quad y_1 + y_2 \geq 3$$

$$2y_1 + y_2 \geq 4$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$$

ومن ثم نجد لهذا البرنامج حلا بأتباع طريقة قلب المتباينات من إشارة $\geq$ إلى إشارة $\leq$ ونضيف المتغيرات الإضافية ولتحمل الرمز( m ) لغرض التمييز بين الطريقتين عند المقارنة. كما استبدلنا الرمز $AB_j$ ) ( بدلا من ( $CB_j$ ) لنفس الغرض.

| | | $A_j$ | 1 | 2 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $AB_i$ | B | V | $y_1$ | $y_2$ | $m_1$ | $m_2$ | check |
| 0 | $m_1$ | -3 | -1 | -1 | 1 | 0 | -4 |
| 0 | $m_2$ | -4 | (-2) | -1 | 0 | 1 | -6 |
| | $A_j$-$Q_j$ | 0 | 1 | 2 | 0 | 0 | 3 |
| | $m_1$ | -1 | 0 | $-\frac{1}{2}$ | 1 | ($-\frac{1}{2}$) | -1 |
| | $y_1$ | 2 | 1 | $\frac{1}{2}$ | 0 | $-\frac{1}{2}$ | 3 |
| | $A_j$-$Q_j$ | -2 | 0 | $\frac{3}{2}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| | $m_2$ | 2 | 0 | 1 | -2 | 1 | 2 |
| | $y_1$ | 3 | 1 | 1 | -1 | 0 | 4 |
| | $A_j$-$Q_j$ | -3 | 0 | 1 | 1 | 0 | -1 |



إذن الحل الأمثل للبرنامج الثنائي هو:

$$y_1 = 3, y_2 = 0, m_1 = 0, m_2 = 2, Q = 3$$

والآن ماذا نلاحظ:

1- إن قيمة دالة الهدف في البرنامجين واحدة أي أن:

$$Z = Q = 3$$

2- إن قيم متغيرات الحل الأمثل للبرنامج الثنائي موجودة في الصف **Cj-Zj** من جدول البرنامج الأصلي والعكس بالعكس لنوضح أكثر:

خذ صف الحل الأمثل $C_j - Z_j$ من جدول البرنامج الأصلي نلاحظ أن قيم متغيرات الحل الأمثل للبرنامج الثنائي تظهر كما مبين أدناه ولكن بعكس الإشارة:

| $C_j - Z_j$ | 0 -2 -3 0 |
|---|---|
| قيمة متغيرات الحل الأمثل للبرنامج الثنائي | $m_1$ $m_2$ $y_1$ $y_2$ |

أي أن: $y_1 = 3, y_2 = 0, m_1 = 0, m_2 = 2, Q = 3$

كذلك عند ملاحظة صف الحل الأمثل $A_j - Q_j$ من جدول البرنامج الثنائي نلاحظ أن قيم متغيرات الحل الأمثل للبرنامج الأصلي تظهر كما مؤشر:

| $A_j - Q_j$ | 0 1 1 0 |
|---|---|
| قيمة متغيرات الحل الأمثل للبرنامج الأصلي | s1 s2 x1 x2 |

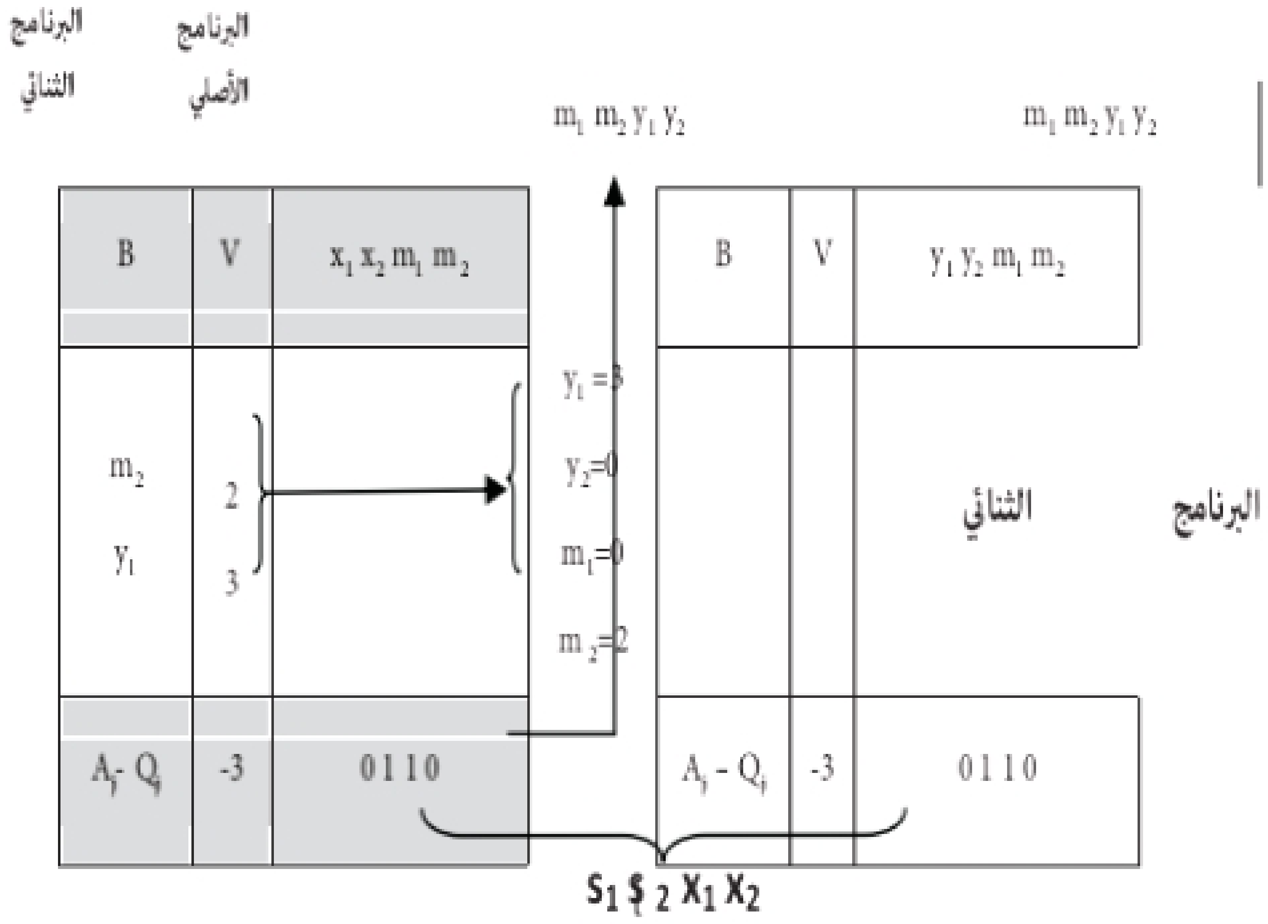
أي أن: $X_1 = 1, X_2 = 0, S_1 = 0, S_2 = 1, Z = 3$

وعلى هذا الأساس يقدم الجدول التالي القاعدة التي يمكن إتباعها لاستنتاج الحل الأمثل لأحد البرنامجين من الآخر:

| البرنامج الثنائي ( Dual Program ) | البرنامج الأصلي ( primal Program ) |
|---|---|
| قيمة دالة الهدف. | قيمة دالة الهدف. |
| قيم المتغيرات الإضافية. | معيار المتغيرات الأصلية. |
| قيم المتغيرات الأصلية. | معيار المتغيرات الإضافية. |
| (-) معيار المتغيرات الإضافية. | قيم المتغيرات الأصلية. |
| (-) معيار المتغيرات الأصلية. | قيم المتغيرات الإضافية. |

دعنا نوضح هذه العلاقات بإجراء المقارنة بين مكونات جدول الحل الأمثل للبرنامجين أعلاه:

| B | V | $x_1$ $x_2$ $s_1$ $s_2$ | |
|---|---|---|---|
| $x_1$<br>$s_1$ | 1<br>1 | → | x1=1<br>x2=0<br>s1=0<br>s2=1 |
| $C_j - Z_j$ | -3 | 0 -2 -3 0 | |






إن البرنامج الثنائي يوفر أسعاراً ضمنية أو أسعاراً حسابية من خلال قيم المتغيرات التي ترد في الحل الأمثل وتفيد هذه الأسعار والتي عادة ما تسمى بأسعار الظل في حساب كفاءة تخصيص الموارد.

حيث تؤشر قيم متغيرات الحل الأمثل أسعار المدخلات التي يعتمدها المنتج لتقييم كفاءة تخصيص الموارد التي يستخدمها في الإنتاج وهو يخطط لتعظيم أرباحه.

دعنا نفسر ذلك بالعودة إلى صيغة البرنامج الأصلي والبرنامج الثنائي:

| البرنامج الثنائي | البرنامج الأصلي |
| --- | --- |
| $\min \quad Q = b_1y_1 + \ldots + b_my_m$<br>$s.t.$<br>$a_{11}y_1 + \ldots a_{1m}y_m - m_1 = c_1$<br>$a_{1n}y_1 + \ldots + a_{mn}y_m - m_n = c_n$<br>$y_1 \geq 0, \ldots, y_m \geq 0$<br>$m_1 \geq 0, \ldots, m_n \geq 0$ | $\max \quad Z = c_1x_1 + \ldots c_nx_n$<br>$s.t. \quad a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + s_1 = b_1$<br>$a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n + s_m = b_m$<br>$x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$<br>$s_1 \geq 0, \ldots, s_m \geq 0$ |

ومن البرنامج الثنائي نأخذ القيد الأول كمثال ونلاحظ بأن:

$$m_1 = (a_{11}y_1 + \ldots + a_{1m}y_1) - c_1$$

حيث أن $C_1$ تمثل مقدار الربح المتأتي من الوحدة الواحدة للمنتج الأول $X_1$ وان المقدار بين القوسين يمثل القيمة الحسابية للموارد المستخدمة في إنتاج وحدة واحدة من المنتج $X_1$ حيث أن: $a_{11}$ هو كمية المستخدمات في المنتج $X_1$ أما $y_1$ فسعر الوحدة الواحدة من المستخدمات رقم (1) ولهذا فإن: $a_{11}y_1$ هي كلفة المستخدمات رقم (1) المستخدمة في إنتاج المنتج $x_1$ وهكذا بالنسبة لقيمة المستخدمات الأخرى. وعليه يمكن أعادة كتابة المعادلة أعلاه بالصيغة الآتية:

| $m_1 =$( أرباح الوحدة من $x_1$ ) - ( قيمة الموارد المستخدمة في إنتاج وحدة من $x_1$ ) |
| --- |

ومن هذه المعادلة نلاحظ بأنه أذا كانت قيمة $(m_1)$ موجبة فهذا يعني أن الموارد المستخدمة في إنتاج السلعة $x_1$ أكثر من الإرباح المتحققة من هذه السلعة. أما أذا كانت قيمة $(m_1)$ سالبة فهذا يعني العكس تماما.

وبذلك يستطيع المنتج عن طريق تدقيق قيم المتغيرات الإضافية التي يحصل عليها من الحل الأمثل للبرنامج الأصلي التي تمثل قيم المتغيرات في الحل الأمثل للبرنامج الثنائي أن يتعرف على كفاءة تخصيص الموارد.

وعليه نستطيع أن نلخص تفسير المتغيرات في كل من البرنامج الأصلي الثنائي كما يلي:

$x_j$: يمثل الكمية المنتجة من المنتج j وهي المتغيرات الاعتيادية في البرنامج الأصلي.

$S_i$: تمثل الكمية (الطاقة ) غير المستغلة من المستخدم i وهي المتغيرات الإضافية في البرنامج الأصلي.

$y_i$: وتمثل السعر الحسابي (سعر الظل ) للمستخدم i وهي المتغيرات الاعتيادية في البرنامج الثنائي.

$m_j$: وتمثل قيمة الخسارة في الوحدة الواحدة من المنتج j وهي المتغيرات الإضافية في البرنامج الثنائي.

ونعيد إلى الذهن مره أخرى إلى أن كل من $x_j , s_i$ تمثل كميات في حين تمثل $y_i , m_j$ قيما نقدية. كما أن كلا من $x_j , m_j$ تشير إلى المخرجات (outputs) أما $y_i , s_i$ فتشير إلى المدخلات (inputs) وكما مبين في الجدول الآتي:



| الفقرة | المتغير الأصلي(الكميات) | المتغير الثنائي (قيمة نقدية) |
|---|---|---|
| المخرجات | $x_j$ | $m_j$ |
| المدخلات | $s_i$ | $y_i$ |

## تمارين (3-5)

**جد البرنامج الثنائي لكل من المسائل الآتية، ثم جد حل أي من البرنامجين الذي تراه ابسط.**

-1
$$\max \ Z = 6x_1 - 5x_2 + x_3$$

$$s.t. \quad x_1 - x_2 \le 5$$
$$3x_2 + 4x_3 \le 4$$
$$x_1 + x_2 \le 20$$
$$x_3 \le 16$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0$$

-2

$$\min\ z = x_1 + 5x_2$$

$$s.t. \quad x_1 + x_2 + x_3 \geq 3$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 10$$

$$x_1 + 2x_3 \geq 6$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

ملاحظة:

أضف إلى دالة الهدف $x_3$ بالصيغة الآتية ( $+(0)x_3$ ) وذلك لتسهيل عمليات الحل.

3- حل البرنامج الآتي ثم جد حل البرنامج الثنائي له وعلق على النتائج:

$$\min\ \ Z = 12x_1 + 10x_2 + 8x_3$$

$$st. \quad 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 6$$

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 3$$

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 3$$

# الفصل السادس

# استخدام البرمجة الخطيـــة

# في التخطيط أو اتخاذ القرارات

# استخدام البرمجة الخطية في التخطيط أو اتخاذ القرارات

## 6-1 مقدمة

عند دراسة الكيفية التي تتم بها العمليات الإنتاجية لمختلف المشاريع يلاحظ بأن إنتاج سلعة معينة يمكن أن يتم بطرق مختلفة من حيث التكنولوجيا والمدخلات والأيدي العاملة وأساليب التعبئة والتغليف وتكاليف النقل والتنوع البيئي التي تدخل في السلعة وغير ذلك.

فإنتاج الكهرباء يمكن أن يتم باستخدام المكائن الحرارية أو الكهرومائية أو الذرية أو الشمسية وما عداها. حيث تختلف تكاليف وكفاءة هذه الماكنة عن الأخرى فتصبح أمام المخطط ومتخذ القرارات بدائل عديدة كل بديل له ميزاته وله تكاليفه ومساوئه وان حساب هذه الميزات أو المساوئ يتم عادة بوسائل فنية على رأسها البرامج الرياضية وفي المقدمة منها البرامج الخطية.



## 6-2 الإطار العام للبرنامج الخطي The General Frame of LP

لكي نحدد معالم البرنامج الخطي بشكل أوضح دعنا نفترض أن مخططاً أراد التقدم بمقترح إنشاء مشروع للإسمنت يتخصص بإنتاج نوعين من الأسمنت هما: الأسمنت الاعتيادي والأسمنت المقاوم للملوحة وكانت أمام المخطط مشكلة حساب جدوى المشروع التي تتطلب منه وضع مخطط متكامل يجعل المشروع ينتج بأقل تكاليف وبأعلى إنتاج ممكن وبهذا عليه مراعاة جملة من المعطيات منها على سبيل المثال: موقع المشروع الذي يؤثر على تكاليف نقل المواد الأولية من المشروع ونقل الإنتاج من المشروع إلى منافذ التوزيع مما يجعل المخطط بين خيارين فأما يختار مكانا يقع قرب المقالع الخاصة بالمواد الأولية فيقتصد بالكلف ولكن عليه في نفس الوقت أن يتحمل تكاليف أعلى لنقل

المنتجات إلى مراكز الاستهلاك وكما عليه أن يتحمل تكاليف أخرى يفرضها موقع المشروع البعيد عن المناطق الحضرية كمد شبكات طرق وكهرباء وإنشاء المجمعات السكانية للعاملين ومراكز خدمات ومدارس ومستشفيات في الموقع وغيرها. أو قد يختار المخطط موقع بعيد عن مقالع المواد الأولية أي قرب مركز حضري تتوفر فيه شبكات الطرق والكهرباء وغيرها فيتجنب الكثير من الكلف ولكن عليه أن يتحمل تكاليف نقل المواد الأولية من المقالع إلى المشروع.

هذا من حيث موقع المشروع وهي إحدى أهم القضايا التي تطرح أمام المخطط ولازالت أمامه قضايا كثيرة مهمة أيضا يتعين عليه إدراجها في دراسة جدوى المشروع ومنها: نوع المواد الأولية المستخدمة: فالبعض منها محلي وهذا يفرض عليه الاختيار بين الموقع الذي تتوفر فيه المواد الأولية الجيدة ولكن بعيدا عن مراكز المدن وفي كلتا الحالتين عليه حساب الكلفة والفوائد ومن ثم الاختيار كما أن بعض المواد الأولية مستوردة وهذه تتطلب حسابات تتعلق بالأفضلية بين المحلي والمستورد منها.

كما يواجه المخطط مشكلة نوع التكنولوجيا التي ستستخدم حيث لكل نوع ميزاته ولكل تكاليفه وعليه اختيار ذلك النوع من التكنولوجيا الذي يتلاءم مع الظروف المناخية للبلاد ومع المواد الأولية المحلية المتوفرة ومع كفاءة وقدرات العاملين دون إغفال مزايا التكنولوجيا الحديثة وتقدمها على غيرها من حيث جودة الإنتاج وسرعته وهذا ويتطلب موازنة دقيقة بين كل هذه الجوانب التي تحيط بتحديد نوع التكنولوجيا كما يتوجب على المخطط ملاحظة حجم الطلب المحلي وإمكانيات التصدير وبهذا عليه اختيار الطاقات الإنتاجية التصميمية والمتاحة بشكل دقيق. كما يتوجب عليه إجراء موازنات سعرية دقيقة للإنتاج بحيث تتحد في ضوءها مؤشرات الربحية واستخدام رأس المال بشكل كفء.

وهناك جوانب كثيرة أخرى يتعين على المخطط دراستها والخروج باستنتاجات وتوصيات واضحة ، وهكذا يكون المخطط بحاجة إلى وسائل تساعده على معالجة الكثير من هذه الخيارات والمعطيات والمتغيرات التي قد يصعب السيطرة عليها بمجرد النظرة

المكتبية البسيطة إليها. وقد يكون من المناسب له الركون إلى وسائل أكثر كفاءة تساعده على بلوغ هذه المهمة منها المعالجة الرياضية عن طريق البرامج الخطية.

ولأجل إلقاء الضوء على أهمية البرامج الخطية في التخطيط واتخاذ القرارات سنحاول تناول بعض جوانب استخدام البرامج الخطية في هذه المواضيع.

## 6-3 المجالات التي تستخدم فيها البرامج الخطية

ذكرنا بأن استخدام البرمجة الخطية كثيرة ومتعددة ولكن الذي يهمنا هو التعرف على مجالات استخداماتها في التخطيط واتخاذ القرارات حيث برز هذا الموضوع في العقود الأخيرة وصار يحتل مكاناً بارزاً في الحقول الآتية:

1- اختيار الموقع الأمثل للمشروع حيث تتحكم بالموقع مجموعة من الخيارات - كما ذكرنا - وكل خيار له شروطه وقيوده وان اختيار الموقع الأمثل يحتاج إلى معالجة كل المتغيرات التي تؤثر على هذا الخير وفق نموذج خطي يوضع لكل موقع وبحل مجموعة النماذج يمكن الاهتداء إلى أفضل موقع من بين الخيارات المطروحة.



2- تحديد النسب المثلى للمزج بين المدخلات ( المواد الأولية والعمل ورأس المال وغيرها) وذلك بهدف التوصل إلى أفضل إنتاج بأقل تكاليف ممكنة.

3- اختيار نوع التكنولوجيا المستخدمة وهنا تلعب البرمجة الخطية دورا كبيرا في هذا الاختيار حيث ترشد المخطط والمنتج إلى أكفأ وسيلة تكنولوجية تعطي إنتاجا جيدا من حيث الكم والنوع وبتكاليف اقل مقارنة بالوسائل الأخرى.

4- تحديد الطاقات الإنتاجية للمشروع وذلك بوضع نماذج رياضية خطية تحتوي على حجم الطلب والمواد المتوفرة وعوامل الإنتاج المتاحة ووسائل النقل والتسويق وغيرها وبحل هذه النماذج يهتدي المخطط إلى الطاقات المناسبة لكل نوع من أنواع الإنتاج التي تضمن للمشروع النجاح.

5- تحديد الكفاءة الاقتصادية لكل من الإنتاج المحلي والإنتاج المستورد وبيان أيهما أفضل من وجهة النظر الاقتصادية للبلاد ويستطيع المخطط في ضوء نتائج البرامج الخطية الموضوعة معرفة أي سبيل أفضل: المضي في الإنتاج المحلي أو الاتجاه نحو الاستيراد بعد الأخذ بالاعتبارات الوطنية والاجتماعية لنتائج التحليل الكمي التي يتم التوصل إليها.

6- اختيار أفضل أسلوب نقل وتوزيع للإنتاج أو المواد الأولية بين مناطق التجهيز والمعمل وبالعكس وهذا يتطلب اعتماد برامج خطية تدعى برامج النقل.

7- استخدام الموارد المتاحة أفضل استخدام فالبرمجة الخطية تقدم نتائج مفيدة في مجال تحقيق اقل الكلف الممكنة مع المحافظة على مستوى معين من الإنتاج من حيث الحجم أو النوع أو كليهما أو تحقيق أعلى إنتاج ممكن من حيث الكم مع المحافظة على مستوى معين من التكاليف. وبذلك يمكن التوصل إلى اقل كلفة للوحدة الواحدة من الإنتاج.

## 6-4 بناء البرنامج الخطي LP Building

تطرقنا في الفصل السابق إلى الأسلوب النظري لبناء البرنامج الخطي وقد يكون من المناسب استعراض الجانب التطبيقي لعملية بناء هذا البرنامج.

إن بناء البرنامج الخطي يعني تحويل جميع العوامل أو الظروف والإمكانيات والقيود التي تحيط بالمسألة إلى معادلات أو متباينات وصياغة الهدف الذي يسعى إليه المخطط بصورة رياضية يمكن حلها بالتفاعل مع مكونات البرنامج الأخرى.

وتتطلب عملية بناء النموذج الخطي مجموعة من الاعتبارات يمكن تلخيصها بالآتي:

1- صياغة الهدف من المشروع بأسلوب واضح ودقيق وهذا يتطلب جهداً رياضيا في تحويل الهدف العام ومكوناته التفصيلية إلى دالة رياضية تعبر تعبيراً كفوءاً ومقبولاً عن الغاية من البرنامج.

2- صياغة القيود والظروف المحيطة بالمشروع والإمكانيات المتوفرة وأية شروط ومحددات أخرى بشكل معادلات ومتباينات رياضية واضحة وعدم إهمال أي قيد من القيود الموجودة لان ذلك يفضي إلى خلل في تركيب النموذج ويؤدي إلى ضعف في اعتمادية النتائج المستخلصة.

3- اعتماد جميع الحلول الممكنة للمشكلة. فالبرامج الخطية تقدم حلولا مختلفة لأية مسألة اقتصادية وتمثل هذه الحلول خيارات تعطي للمخطط ومتخذ القرارات حرية انتقاء الأفضل من بينها.

4- سيادة فرضية العلاقات الخطية بين المتغيرات الداخلة في النموذج وإمكانية التعبير عن هذه العلاقات بأسلوب خطي.

5- تبادل العلاقة بين المتغيرات الداخلة في النموذج أي أنها تشكل حزمة واحدة من العوامل التي تؤثر في تكوين النموذج وبعضها مرتبط بالبعض الآخر في علاقات تأثيرية تبادلية قد يكون بعضها ذو تأثير عال وآخر ذو تأثير ضعيف وهذا ما يمكن أن يعكسه النموذج نفسه ويضع هو الآخر خيارات تحت تصرف متخذ القرارات ينتقي العوامل الأكثر تأثير على اتجاهات الهدف الذي وضعه للمسألة.



**ويتكون البرنامج الخطي من الأجزاء الآتية:**

أ- دالة الهدف **Objective Function**

تبحث دالة الهدف في البرامج الخطية عادة عن غايتين رئيسيتين منطلقها هو مواجهة المشكلة الاقتصادية المعروفة بندرة الموارد وتنامي وتعدد الغايات وهي مشكلة واجهها الإنسان منذ زمن بعيد وهي تزداد حدة كل يوم.

ولهذا فإن غاية دالة الهدف في البرمجة الخطية تتلخص في كيفية تحقيق المستوى الأعظم والذي أطلقنا عليه تعظيم (**maximization** ) قيمة دالة الهدف وكثيرا ما يشار إليها بأنها الغاية التي ترمي لتحقيق أعظم أرباح ممكنة في ظل قيود على رأسها محدودية الموارد الاقتصادية أو تحقيق الحد الأدنى والذي أطلقنا عليه إقلال (**minimization** )

قيمة دالة الهدف التي تسعى للوصول بالتكاليف إلى اقل ما يمكن مع مراعاة القيود المفروضة وعلى رأسها المحافظة على المستوى الكمي أو النوعي للإنتاج عند حدود معينة. وتحتوي دالة الهدف على المتغيرات التي تتضمنها المسألة الموجودة أساساً في المعادلات أو المتباينات التي تكون الجسم الرئيسي للنموذج أما معاملات هذه المتغيرات فترمز إلى العلاقات النسبية بين أسعار الوحدة الواحدة أو تكاليف هذه الوحدة وغيرها من المعاملات والتي توضع طبقاً للغاية من دالة الهدف فيما إذا كانت تعظيم أو تقليل. فعندما نريد تعظيم الأرباح فإن أسعار بيع المنتجات هي التي تشكل معاملات كل نوع من هذه المنتجات فالدالة الهدف في النموذج الآتي:

$$\max Z = 2x_1 + x_2 + 3x_3$$

تشير إلى إن سعر المنتج الأول $x_1$ هو (2) والثاني (1) أما سعر المنتج الثالث فهو (3) وإذا كانت هذه الأسعار معطاة وافترض ثباتها في الأجل القصير فإن تعظيم الأرباح يبقى معلقاً على بلوغ اكبر مستويات الإنتاج لكل من $x_1, x_2, x_3$ ضمن القيود الموجودة. أما دالة من النموذج الآتي:

$$\min Z = x_1 + 3x_2 + 5x_3$$

فتشير معاملاتها إلى أسعار المواد الأولية ومستلزمات الإنتاج الأخرى وعليه فإن المنتج الأول $x_1$ يكلف (1) أما المنتج الثاني $x_2$ فيكلف (3) في حين يكلف المنتج $x_3$ أكثر من ذلك فتصل تكاليفه إلى (5) وحدات نقدية. وإذا كانت هذه التكاليف معطاة أي أنها مرتبطة بعوامل فنية وتسويقية خارج عن إرادة الإدارة الإنتاجية فلا يبقى مناص أمام هذه الإدارة إلا النزول بمستوى الإنتاج إلى حدود معينة تقررها الشروط المفروضة على المسألة بحيث يمكن إنتاج أفضل تشكيلة من المنتجات $x_1, x_2, x_3$ عند ذلك المستوى وبأقل التكاليف الممكنة.

ب- قيود النموذج **Program's Constants**

إن قيود النموذج هي التي تتحدث عن وجود مشكلة اقتصادية وهو الأمر المعتاد فلو كانت دالة الهدف حرة لا قيد عليها فعند ذاك يمكن الصعود بالدالة إلى اكبر نقطة

ممكنة دون حدود معينة أو النزول بها إلى أدنى مستوى ممكن دون حدود ولكن الواقع الذي نحن فيه هو عكس ذلك فالموارد محدودة والطاقات الإنتاجية مقيدة والأسعار مرتبطة بعوامل خارج عن إرادة المشروع وساعات العمل سواء للآلات أو للقوى البشرية محكومة بظروف عديدة وغير ذلك من المحددات التي جعلت من عملية تعظيم أو تقليل دالة الهدف مثقلة بشروط ومحصورة ضمن إطار معين تتحكم به مجموعة من القيود ومن هنا نشأت المشكلة الاقتصادية الحقيقية ووضعت طرق عديدة لحلها ومنها البرامج الخطية.

فالقيود (constraints) ما هي إلا المحددات التي يتعين على دالة الهدف مراعاتها وهي تسعى لبلوغ غايتها العظمى أو الصغرى، ويبذل واضعو البرامج جهداً في ترجمة هذه المحددات إلى صيغ رياضية تجمع بين الوضوح و الفهم و البساطة وبين الكفاءة والقدرة على استيعاب المؤثرات التي تعكسها المحددات على جسم البرنامج برمته.

ج- عدم السلبية **No negativity**



حيث أن البرامج الخطية الاقتصادية تتعامل مع متغيرات اقتصادية وان قيم هذه المتغيرات لا معنى لها إذا كانت سالبة لذلك فإن القيم التي يهتم بها المخطط والراداري والمبرمج هي التي تقع في الربع الأول من النظام الإحداثي أي الربع الذي تكون فيه قيمة المتغير سواء كان على الإحداثي العمودي أو الأفقي موجبة ويشمل هذا جميع الإحداثيات الأخرى إذا كان لدينا أكثر من متغيرين في المشكلة موضوعة البحث. وتأسيساً على ذلك فقد أضيفت قيود أخرى إلى المسألة إضافة إلى القيود الاعتيادية المفروضة عليها وهي قيود عدم السلبية.

## 6-5 استخدام البرمجة الخطية في التخطيط

ذكرنا أن من بين المجالات التي تستخدم فيها البرامج الخطية هي التخطيط لإنشاء مشاريع معينة وذلك بهدف الوقوف على جدوى هذا المشروع من خلال التعرف على النتائج المتوقعة منه ضمن إطار القيود والشروط المالية والاقتصادية والاجتماعية المفروضة. وقد يكون من المناسب استعراض مثال توضيحي رقم (1) عن هذا الأسلوب.

دعنا نتداول هذا المثال عن مشروع لإنتاج العلف الحيواني والذي احتوته المذكرة الإيضاحية الآتية:

المطلوب/ إقامة مشروع لإنتاج عليقة حيوانية تحتوي على ما لا يقل عن (3000) سعره حرارية و (80) وحدة بروتين في اليوم. وهناك (4) أنواع من العناصر الغذائية التي يمكن أن تستخدم في إنتاج هذه العليقة وهي:

الغذاء الأول: ويكلف (4) وحدات نقدية للكغم الواحد. والغذاء الثاني: ويكلف (2) وحدة نقدية للكغم الواحد. والغذاء الثالث: ويكلف (5) وحدة نقدية للكغم الواحد. والغذاء الرابع: ويكلف (6) وحدات نقدية للكغم الواحد.

أما محتويات هذه الأنواع الأربعة من العناصر الغذائية فهي كما يلي:

| نوع الغذاء | سعره حرارية | وحدات بروتين |
|---|---|---|
| الأول | 600 | 2 |
| الثاني | 50 | 8 |
| الثالث | 500 | 10 |
| الرابع | 800 | 3 |

والمطلوب بناء نموذج خطي وتحديد العليقة الأقل كلفة والمستخلصة من مزج امثل لكميات مناسبة من الأغذية الأربع. لاشك أن هذه المسألة تشكل واحدة من مجموعة القضايا التي يواجهها المخطط فهي تتعلق بتحديد الكلفة الأقل للعليقة المطلوبة من بين بدائل مختلفة.

وربما هناك مسائل أخرى تتعلق بالموقع والمواد الأولية والنقل وغيرها والتي تتطلب أعداد برامج خطية خاصة يهتدي بها المخطط إلى اختيار البديل الأفضل وصولاً إلى دراسة متكاملة عن المشروع يمكن في ضوءها اتخاذ القرار السليم بشأن إقامة المشروع من عدمه.

والآن لنعد إلى مسألة اختيار العليقة الأرخص ولنبدأ ببناء النموذج أولاً:

1- الرموز Notation

دع: $x_1, x_2, x_3, x_4$ ترمز إلى عدد الكغم من الغذاء المستعمل في العليقة رقم (1,2,3,4) على التوالي.

2- دالة الهدف Object Function

وغايتها إقلال كلفة العليقة إلى اقل ما يمكن وحيث أن كلفة العليقة تتكون من حاصل جمع كلفة الأغذية الأربع وان كلفة أي من هذه الأغذية هي حاصل ضرب كلفة الكغم الواحد في عدد الكغم من الغذاء المعني الذي سينتج أي أن دالة الهدف تكون:

$$\min Z = 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 6x_4$$

3- القيود Constraints

وتتضمن القيود ما يأتي:

أ- إلا يقل عدد السعرات الحرارية التي تحتويها العليقة عن (3000) سعره وحيث أن مجموع هذه السعرات يتكون من مجموع السعرات الحرارية للأغذية الأربع وان مجموع السعرات التي يحتويها الغذاء الواحد هي عدد الكغم المنتجة مضروب بمحتويات الكغم الواحد من السعرات الحرارية وعليه فإن القيد الأول يكون كما يلي:



$$600x_1 + 50x_2 + 500x_3 + 800x_4 \geq 3000$$

ب- ألا تقل وحدات البروتين في العليقة عن (80) وحدة وحيث أن عدد وحدات البروتين في الغذاء هي عدد الكغم المنتجة من هذا الغذاء مضروب بمحتوياته من البروتين وعليه فإن مجموع ما تحتويه العليقة من البروتين مقيد بالآتي:

$$2x_1 + 8x_2 + 10x_3 + 3x_4 \geq 80$$

ج- قيود عدم السلبية وهذه تتضمن أن يكون حجم الإنتاج من كل من ($x_1, x_2, x_3, x_4$) أكثر أو يساوي صفر أي أن:

$$x_1 \geq 0 \quad , x_2 \geq 0 \quad , x_3 \geq 0 \quad , x_4 \geq 0$$

4- حل المشكلة **Solution of the Problem**

بعد وضع هذا البرنامج الخطي في جدول السمبلكس ومتابعة خطوات حله يتم التوصل إلى النتائج الآتية ( راجع الفصل الخامس بشأن طريقة الحل):

$$x_1 = \frac{200}{47} \ , x_2 = \frac{420}{47} \ , x_3 = 0 \ \ , x_4 = 0 \ \ Z = \frac{1646}{47}$$

5- الاستنتاجات

أن أفضل إنتاج يمكن أن يختاره المشروع المزمع إقامته هو إنتاج $(\frac{200}{47})$ من الغذاء $x_1$، $\frac{420}{47}$ من الغذاء $x_2$، اللذان يمزجهما يعطيان عليقة فيها اكبر مقدار من السعرات الحرارية ومن وحدات البروتين وتكلف هذه العليقة اقل ما يمكن من التكاليف. وينصح البرنامج بعدم إنتاج أي من الغذائيين ( $x_3 , x_4$ ) لأنهما لا يعطيان عليقة بالنتائج المثلى أعلاه.

**دعنا نتناول مثال آخر:**

مثال (2):

اتجهت النية على إنشاء مشروع لإنتاج اللدائن وقد وضعت التصاميم لهذا المشروع كي يقوم باستعمال واحد أو أكثر من أربع عمليات إنتاجية متوفرة لديه. العملية الأولى والثانية تنجم عنها مخرجات مقدارها ( M ) في حين تنجم عن العملية الثالثة والرابعة مخرجات مقدارها (N). وهناك ثلاثة أنواع من المدخلات لكل عملية من هذه العمليات الأربع هي:

العمل مقدر (برجل - أسبوع)، ومواد أولية من النوع (A) مقدرة (بالكغم) ومواد أولية من النوع (B) مقدرة (بالصناديق).

وتتطلب كل عملية مدخلات مختلفة عن الأخرى. أما بالنسبة للإيرادات المستحصلة فإنها تتباين تبعاً لتباين العمليات أعلاه.

وعند تحديد برنامج الإنتاج الأسبوعي لهذا المشروع وجد بأنه لا يستطيع تشغيل أكثر من العدد المتوفر من القوى البشرية ومن المتوفر من المواد الأولية (A , B) وقد قدمت المعلومات الآتية بشأن هذه المحددات كما يظهرها الجدول الأتي:

جدول رقم ( 1 - 6 )

| ت | الفقرة | وحدة واحدة من M | | وحدة واحدة من N | | المدخلات المتوفرة |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | عملية (1) | عملية (2) | عملية (3) | عملية (4) | |
| 1 | رجل - أسبوع | 1 | 2 | 1 | 2 | 20 |
| 2 | كغم من المواد الأولية A | 6 | 5 | 3 | 2 | 100 |
| 3 | صندوق من المواد الأولية B | 3 | 4 | 9 | 12 | 75 |
| 4 | مستوى الإنتاج | X1 | X2 | X3 | X4 | |



أما الإيرادات المتأتية عن بيع وحدة واحدة من الإنتاج فإن دراسة السوق قد أظهرت ما يلي:

جدول رقم ( 2 - 6 )

| إنتاج العملية | إيرادات الوحدة الواحدة |
|---|---|
| 1 | 6 |
| 2 | 4 |
| 3 | 7 |
| 4 | 5 |

وقد قام جهاز التخطيط ببناء النموذج الخطي للمسألة أعلاه وقد ظهر بالصورة الآتية:

$$\max Z = 6x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 5x_4$$

$$Subject\ to:$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \le 20$$

$$6x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \le 100$$

$$3x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 12x_4 \le 75$$

إضافة إلى قيود عدم السلبية وهي:

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0$$

وبعد أن وضع النموذج في صورته النهائية قام جهاز التخطيط باستخراج الحل باستخدام طريقة السمبلكس وكانت النتائج كما يلي:

$$x_1 = 15, x_2 = 0, x_3 = \frac{10}{3}, x_4 = 0$$

$$s_1 = \frac{5}{3}, s_2 = 0, s_3 = 0, z = 113.3$$

**وفي ضوء النتائج أعلاه قدم جهاز التخطيط التوصيات الآتية:**

1- مستويات الإنتاج

إن أفضل مستويات الإنتاج التي تحقق الهدف من إقامة المشروع وهو تحقيق أعلى إيراد ممكن هي إنتاج (15) وحدة من (M) بواسطة العملية رقم (1) و ( $\frac{10}{3}$ ) وحدة من (N) بواسطة العملية رقم (3) وعدم تشغيل العمليتين الثانية والرابعة إضافة إلى تبقي احتياطي من القوى العاملة مقداره ( $s_1 = \frac{5}{3}$ ) لم يستعمل في العلميات الإنتاجية.

2- مستوى الإيراد

لقد اظهر حل المسألة مستوى إيراد مقداره (113.3 ) وهو أعلى مستوى يمكن بلوغه مع المحافظة على القيود المفروضة على الإنتاج وهي محدودية القوى العاملة والمواد الأولية ( A, B ) وان أي مستوى إنتاجي آخر للعمليات الأربعة لا يعطي هذا المستوى من الإيراد ضمن القيود التي تضمنها البرنامج.

3- حدود الإنتاج

لقد كشف الحل الأمثل للمسألة أن الإنتاج سيقتصر على تشغيل العملية الأولى والثالثة وعدم الحاجة إلى العملية الثانية والرابعة لكون الإيراد الحدي لكل منهما منخفض ( 5, 4 ) كما يظهر من دالة الهدف مقارنة بالإيراد الحدي لإنتاج العملية الأولى والثالثة ( 6, 7 ) على التوالي كما أن عمليات الحل قامت بممازجة الإيراد الحدي مع الكلف واستخرجت الإنتاج الأمثل الذي يحقق أعلى إيراد ممكن.

**لنأخذ مثالاً ثالثاً:**

مثال (3):



أرادت إحدى دور النشر إقامة خط طباعي متخصص في طباعة نموذجين من الكتب: كتب ذات حجم صغير وتدعى بالنموذج الأول وكتب ذات حجم كبير وتدعى بالنموذج الثاني وقد أظهرت الدراسات بان النموذج الأول يحقق ربحاً قدره (520) والنموذج الثاني يحقق ربحا قدره (450). ويحتاج النموذج الأول (40) ساعة لتهيئة الطباعة الأولية والكلائش و (24) ساعة للطباعة والكبس والتجليد بينما يحتاج النموذج الثاني إلى (25) ساعة لتهيئة الطباعة الأولية والكلائش و(30) ساعة للطباعة والكبس والتجليد. وقد وجد بأن عدد الساعات المتوفرة للطباعة الأولية والكلائش هي (400) ساعة في حين لا تتوفر سوى (360) ساعة لغرض الطباعة والكبس والتجليد.

وقد قام قسم الأبحاث في دار النشر بصياغة المسالة كالآتي:

$$\max Z = 520x_1 + 450x_2$$

$$st. \quad 40x_1 + 25x_2 \leq 400$$

$$24x_1 + 30x_2 \leq 360$$

$$x_1 \geq 0 \ , x_2 \geq 0$$

وبعد حل المسألة بطريقة السمبلكس كان الحل كما يلي:

$$x_1 = 5, x_2 = 8 \ , Z = 6200$$

وقد اتضح من الحل بأن هذا الخط الإنتاجي الجديد كي يحقق أقصى الأرباح في ظل محدودية ساعات العمل المتوفرة. يتعين عليه أن ينتج (5) كتب من النموذج الأول و (8) كتب من النموذج الثاني وقد قدم قسم الأبحاث تقريره إلى مجلس إدارة دار النشر بهذا الخصوص وفي ضوء هذه النتائج قد يقوم مجلس الإدارة باستكمال الدراسات عن النقل والتسويق والمواد الأولية وكلف الإنتاج وكل هذه وغيرها تحتاج إلى وضع برامج خطية أخرى واستخلاص النتائج ومن ثم إجراء المقارنة بينها وقد يتطلب الأمر وضع برنامج خطي متكامل يضم جميع جوانب المشكلة ومن ثم اتخاذ القرار المناسب في ضوء النتائج التي يظهرها حل هذا البرنامج.

لقد كانت النماذج التي استعرضناها بسيطة بغية توفير حسن الفهم وسهولة الإحاطة والإدراك فقد تحتوي البرامج الخطية على العديد من المعادلات والمتباينات وكل معادلة أو متباينة تحتوي على العديد من المتغيرات وكذلك الحال بالنسبة إلى دالة الهدف ولكن رغم هذا الاتساع لا توجد صعوبة في حل مثل هذه المسائل في ظل الإمكانيات الكبيرة والتسهيلات التي تقدمها أجهزة الحاسوب الحديثة.

## 6-6 استخدام البرمجة الخطية في تحديد الطاقات الإنتاجية

هنـاك عـدة أنـواع للطاقـة الإنتاجيـة منهـا التـصميمية والنظريـة والقـصوى والمتاحـة والفعليـة وغيرها.وعادة ما يتم الركون إلى الطاقة الإنتاجية المتاحة في أكثر الأحيـان حـين يـشار إلى الطاقـة الإنتاجيـة ويقصد بها الطاقة القصوى بعد استبعاد التوقفات والاختناقات في العملية الإنتاجية. ولغـرض البحـث عـن الطاقة الإنتاجية وفق البرمجة الخطية قد يكون من المناسب إعادة صياغة مفهوم الطاقة الإنتاجية المتاحـة ليعني اكبر إنتاج يمكن أن تحققه الوحدة في ظل ظروف عمل اعتيادية وخلال فترة زمنية محددة.

وتحسب الطاقة الإنتاجية عادة بالوحدات الكميـة كالقطعـة والطـن والمـتر وغـير ذلـك في الإنتـاج المتجانس أما إذا كان الإنتاج غير متجانس حيث لكل وحدة إنتاجية خصائصها فيتم اللجـوء إلى الحـسابات النقدية وتقيم هذه الحسابات بالأسعار الثابتة بهدف استبعاد آثار التضخم وارتفاع الأسعار منها.

ويتكون البرنامج الخطي الذي يظهر الطاقة الإنتاجية المثلى في المشروع من البناء الرياضي الآتي:



$$\max z = \sum_{j=1}^{n} cjxj$$

$$st.$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \qquad (i = 1,2,\ldots,m)$$

$$x_j \ge 0 \qquad (j = 1,2,\ldots,n)$$

حيث يشير البرنامج إلى أن هذا المشروع ينـتج (n) مـن المنتجـات (x) ويـستخدم في عملياته التشغيلية (m) من مستلزمات الإنتاج ( مـوارد) مثـل اليـد العاملـة والمـواد الخـام والمكائن وساعات العمل وغير ذلـك. وأن هـذه المـستلزمات والمـوارد ذات حجـم محـدود وقد خصص حجـم معـين منهـا مقـداره ($b_i$) وفـق معـاملات فنيـة لحاجـة كـل نـوع مـن

المنتجات أشير إليها بالرمز ($a_{ij}$) أما سعر الوحدة الواحدة لكل نوع من الإنتاج فهو ($c_j$) وهناك شروط عدم السلبية وهي: $x_j \geq 0$.

ولأجل إيجاد الطاقة الإنتاجية المثلى فإن البحث يتجه عادة إلى استكشاف مديات الاستفادة من هذه الطاقة وتحدد لذلك الأهداف الآتية:

1- تحقيق اكبر ربح ممكن.

2- تحقيق اكبر حجم من الإنتاج.

3- استغلال المواد المتاحة للمشروع أفضل استغلال.

ولغرض التعرف على هذه الأهداف فإن الآمر يقتضي إعادة صياغة دالة الهدف لتتواكب مع كل هدف أو تعديل القيود وبذلك تتكون لدى المحلل عدة برامج وعند إيجاد حلولها المثلى تتم دراسة كل حل ومقارنته بالحلول الأخرى وعند ذلك تقرر إدارة المشروع اختيار الهدف الأفضل الذي يشير إلى الاستغلال الأفضل للطاقة الإنتاجية أو بكلمة أخرى إلى الطاقة الإنتاجية المثلى للمشروع.

وقد نحتاج إلى المثال التوضيحي الآتي:

قام قسم البحوث في إحدى المشاريع الإنتاجية بدراسة واقع الطاقة الإنتاجية لأحد أقسام المشروع لإنتاج الأدوات الكهربائية فوجد الآتي:

1- إن لدى القسم مجموعة من خطوط الإنتاج كل خط يتكون من مجموعة من المكائن.

2- إن هذه الخطوط تختص ب (4) وظائف هي التركيب والتوصيل واللحيم والتطاير.

3- إن المكائن في كل خط مصممة لكي تعمل كبديل أحدهما للأخرى وأنها متناظرة من حيث طاقتها الإنتاجية.

4- إن إدارة المشروع قررت إنتاج (3) أنواع من الأدوات الكهربائية.

5- إن القيد الذي يحدد عمل هذه الخطوط هو الزمن المتاح لكل خط إنتاجي وفق النسب التقنية التصميمية لعمل كل خط. وكما مبين في الجدول الآتي:

جدول رقم ( 3-6 )

| الخط الإنتاجي | النسب التقنية لاستخدام الزمن في تصنيع الوحدة الواحدة حسب الخطوط الإنتاجية (دقيقة) | | | الزمن المتاح (ساعة) |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | |
| الأول | 3 | 2 | 1 | 600 |
| الثاني | 1 | 4 | 2 | 880 |
| الثالث | 3 | 1 | 2 | 700 |
| الرابع | 2 | 1 | 1 | 480 |

6- حددت الأرباح الآتية من مبيعات كل منتج من المنتجات الثلاثة: (2,3,1) على التوالي.



7- قدر ثمن الوحدة الواحدة من المبيعات كما يلي:

(5,10,6) وحدة نقدية على التوالي.

8- طلب مجلس الإدارة من قسم البحوث تحديد الطاقة الإنتاجية المثلى في ضوء الأهداف الآتية:

أ - تحقيق اكبر ربح ممكن.

ب- تحقيق اكبر إنتاج ممكن.

ج- تشغيل الخطوط الإنتاجية بأقصى طاقتها المتاحة.

9- ولأجل ذلك فقد صاغ القسم المسألة بهيئة برنامج خطي وحسب الأهداف الموضوعة لتحديد الطاقة الإنتاجية الفضلى وكما يأتي:

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 + x_3$$

$$st. \quad 3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 36$$

$$x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 53$$

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 42$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 29$$

$$x_1 \geq 0 \ , x_2 \geq 0 \ , x_3 \geq 0$$

ملاحظة:

أن الأرقام الظاهرة في الجهة اليمين من القيود ناجمة عن تحويل الساعات إلى دقائق أي ضرب عدد الساعات ب(60) دقيقة ومن ثم حسابها بالآلاف.

10- وبعد انتهاء قسم البحوث من استخراج النتائج قدم التقرير الآتي إلى مجلس الإدارة لتسهيل مهمة المقارنة مع فقرات الخطة الإنتاجية وقد تضمن التقرير الآتي:

جدول رقم ( 4 -6 )

الطاقات الإنتاجية المثلى

| الفقرة | مؤثرات الخطة الإنتاجية | النتائج المثلى المستخرجة | | |
|---|---|---|---|---|
| | | تحقيق اكبر ربح ممكن | تحقيق اكبر إنتاج ممكن | تشغيل الخطوط الإنتاجية بأقصى طاقتها |
| | (1) | (2) | (3) | (4) |
| 1- عدد الوحدات المنتجة (بآلاف) | | | | |
| X1 | 4 | 3.8 | 2 | 4 |
| X2 | 5 | 12.3 | 5 | 6 |
| X3 | 9 | - | 15.5 | 12 |
| المجموع | 18 | 16.1 | 22.5 | 22 |
| 2- الربح (بالآلاف) | 32 | 44.5 | 34.5 | 38 |
| 3- قيمة الإنتاج (بالآلاف) | 124 | 145 | 153 | 152 |
| 4- نسبة الربح لقيمة الإنتاج % | 25.8 | 30.7 | 22.5 | 25.0 |
| 5- نسبة تشغيل الخطوط % | 81.2 | 82.9 | 93.1 | 97.5 |



11- في ضوء التقرير أعلاه يستطيع مجلس الدارة اتخاذ القرار المناسب حسب الأوليات التـي وضـعها فإذا كان الهدف الأول للشركة هو الالتزام بمؤشرات الخطة الإنتاجية فربما يتمسك مجلس الإدارة بالخطة الموضوعة التي يشير إليها البديل الأول أما إذا كان الهدف الأول هو تحقيق الربح تكون الطاقة الإنتاجية المفضلة هي البديل الثاني وإذا كان الهدف الأول هو تحقيق اكبر حجم للإنتـاج

يصبح البديل الثالث هو المفضل أما إذا كان تشغيل الخطوط الإنتاجية بأقصى طاقة متاحة يكون البديل الرابع هو الأفضل. وقد يختار مجلس الإدارة البديل الذي يجمع بين فترة التشغيل بأقصى طاقة وتحقيق الربح والإنتاج بأعلى مستوى ويبدو أن البديل الرابع هو الذي يجمع بين كل هذه الميزات.

وتصبح فائدة البرمجة الخطية أكثر وضوحاً وجدوى كلما كبر حجم المشكلة حيث تقدم حينذاك نتائج دقيقة عن خيارات الطاقة الإنتاجية قد يكون من

المتعذر رصدها بالمقارنة البسيطة التي يمكن أن تتم في حالة الإنتاج المقتصر على نوع واحد أو نوعين فقط. ولحل البرامج الخطية يتم اللجوء إلى الحاسوب لتقديم نتائج سريعة ومضبوطة وقد ترفق بها تحليلات ومقارنات توضيحية مفيدة.

## 6-7 استخدام البرمجة الخطية في تحضير الخطة الإنتاجية

يقوم مجلس الإدارة عادة بوضع الخطوط العريضة لأهداف الخطة الإنتاجية والتي تتضمن حجم الإنتاج ومستوى الربح المستهدف وأنواع المنتجات التي يتعين إنتاجها ومستوى الموارد المتاحة للمنشأة ، والطاقة المتاحة للآلات والمكائن وأسعار المنتجات المتوقعة وحدود التكاليف الثابتة والمتغيرة وأية مؤثرات أخرى تكون في مجملها الإطار العام للخطة الإنتاجية.

ولغرض تحويل هذه المؤثرات الأهداف والقيود إلى أرقام وحسابات تأخذ بعين الاعتبار هذه الأهداف وقدرات الشركة على التنفيذ وتكون قابلة للدراسة والتحليل والمقارنة لابد من معالجتها وفق أساليب تقنية معينة منها أسلوب البرمجة الخطية التي تقدم عرضاً رياضياً كفوءاً لهذه المشكلة وتضع تحت أنظار مجلس الإدارة تصوراً رقمياً واضحاً عن كيفية بلوغ الأهداف التي يسعى إليها.

أما البرنامج الخطي العام الذي يستخدم عادة لهذا الغرض فيفترض بان المشروع الإنتاجي خطط لإنتاج (n) نوعاً من المنتجات كمياتها هي ( $q_j$ ) وان ( $j = 1,2,....,n$ ). أما الموارد التي يستخدمها المشروع لغرض إتمام عملياته الإنتاجية فيبلغ عددها (m) مورداً

وان كمياتها هذه المواد محدودة بالمقادير(bi) وان ( i = 1,2,...,m ) وان النسب الفنية لاستخدام هذه المواد في إنتاج وحدة واحدة من الإنتاج هي( $a_{ij}$ ) وان ربح الوحدة الواحدة من الإنتاج المباع هي (cj) أما الكميات المنتجة من كل نوع والتي تبحث عنها الدراسة فقد افترض أنها ( $x_j$ ). وقد أضاف مجلس الإدارة مبدأ آخر حدد فيه نوعين من الإنتاج الأول ويشمل المنتجات ذات الطلب المحدود والتي لا تقتضي الخطة زيادة إنتاجها عن حجم معين ويبلغ عددها ( k ) والنوع الثاني ويشمل المنتجات ذات الطلب غير المحدود والتي يتعين توفير المرونة الكافية لزيادة إنتاجها حين تقتضي الظروف ذلك ويبلغ عددها ( n - k ). أما صياغة البرنامج الخطي للمشكلة فهي كالآتي:

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

subject to:

$$\sum_{j=1}^{n} aijxj \leq bi \qquad (i = 1,2,......,m)$$



$$x_j = q_j \qquad ,(j = 1,2,........k)$$

$$x_j \geq q_j \qquad ,(j = k+1, k+2,....,n)$$

$$x_j \geq 0 \qquad ,(j = 1,2,....,n)$$

ويمكن تعديل البرنامج أعلاه وذلك بهدف تبسيطه بحذف القيد المتعلق بـالمواد المخصصة لإنتـاج النوع الأول من المنتجات والتي لا ترى الخطة ما يتوجب زيادة إنتاجها وإذا رمزنا للموارد المـذكورة بـالرمز $(b_i')$ فإن البرنامج يؤول إلى:

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

subject to:

$$\sum_{j=1}^{n} aijxj \leq b_i - b'_i \qquad (i = 1,2,......,m)$$

$$x_j \geq q_j \qquad ,(j = k+1, k+2,....,n)$$

$$x_j \geq 0 \qquad (j = 1,2,....,n)$$

وفي ضوء المعطيات المستخلصة عن حل هذه المشكلة بطريقة السمبلكس يمكن وضع خطة إنتاجية تلبي الأهداف التي يرمي إليها مجلس إدارة الشركة ومراعاة القيود والمحددات التي تحيط بالعملية الإنتاجية برمتها.

## تمارين ( 1 - 6 )

1- في مشروع لصناعة الآليات هناك ثلاثة أنواع من المنتجات ينوي المشروع إنتاجها وتحقق له الأرباح الآتية للوحدة الواحدة (3 ) للنوع الأول و(2) للنوع الثاني و(5) للنوع الثالث. ويحتاج كل منتج إلى عوامل الإنتاج الآتية للوحدة الواحدة خلال الساعة الواحدة:

| نوع الإنتاج | عامل / دقيقة | مواد أولية | تعبئة وتغليف |
|---|---|---|---|
| الأول | 2 | 2 | 1 |
| الثاني | 3 | 1 | 2 |
| الثالث | 2 | 2 | 1 |
| المجموع الكلي المتوفر | 30 | 22 | 17 |

وقد أشارت دراسات السوق إلى أن الطلب على النوع الثالث من المنتجات محدود ولهذا فقد قرر مجلس الإدارة تضمين الخطة شرطا مفاده عدم تجاوز إنتاج هذا النوع كمية الإنتاج من النوع الثاني.

فما هي الكميات التي يتعين على المشروع أدراجها في خطته الإنتاجية والتي تحقق له أقصى الأرباح في ظل القيود المفروضة على نشاطه ؟

2- قرر مجلس إدارة إحدى الشركات التي تختص بإنتاج الإطارات دراسة إمكانية إدراج أربعة أنواع من الإطارات في قائمة الإنتاج ضمن خطته الإنتاجية وقد وجد بأن الأرباح المتوقعة من هذه الإطارات هي:

(2) من النوع الأول و(1) من النوع الثاني و(4) من النوع الثالث و(2) من النوع الرابع وقد قرر إنتاج الأعداد الآتية من الأنواع الأربعة مقدرة بالآلاف: (3) من النوع الأول و(2) من النوع الثاني و(5) من النوع الثالث و(2) من النوع الرابع. وقد أوعز إلى قسم الدراسات لإجراء التحليلات اللازمة لخطة الإنتاج التي تحقق الأهداف الآتية:

أ- تحقيق اكبر ربح ممكن.

ب- تحقيق اكبر إنتاج ممكن.

ج- تشغيل الخطوط الإنتاجية بأقصى طاقة لها.



ووضعت المعلومات الآتية تحت تصرف قسم الدراسات والمتعلقة بمتطلبات العمليات الإنتاجية وواقع مستلزمات النتاج المتوفرة:

| مستلزمات الإنتاج | نوع الإنتاج 1 | 2 | 3 | 4 | المتوفر من مستلزمات الإنتاج |
|---|---|---|---|---|---|
| عامل / شهر | 2 | 3 | 2 | 1 | 42 |
| مواد أولية | 4 | 5 | 3 | 3 | 75 |
| ألآت و مكائن | 1 | 2 | 2 | 1 | 32 |
| عملات أجنبية | 2 | 3 | 1 | 1 | 40 |

فإذا طلب منك اخذ دور قسم البحوث ولهذا ترتب عليك صياغة المسألة بشكل برنامج خطي ومن ثم إيجاد الحلول المثلى التي تحقق الأهداف الثلاثة أعلاه وتقديم تقرير توضيحي لمجلس الإدارة.

# الفصل السابع

# معالجات خاصة في البرمجة الخطية

## Special Treatments in Linear Programming

# معالجات خاصة في البرمجة الخطية

# Special Treatments in Linear Programming



## 7-1 مقدمة

استعرضنا في الفصلين السابقين القاعدة النظرية للبرنامج الخطي وبعض تطبيقاته في الحياة العملية وقد اقتصر البحث على كيفية تعظيم أو تقليل دالة هدف معينة مثقلة بقيود ومحددات لا تسمح لها بالحركة إلا ضمن مساحة محدودة سميت منطقة الحلول الممكنة حيث يكون الحل الأمثل للدالة واحدا من نقاط هذه المنطقة.

إن الحل الأمثل للبرنامج يكمن في إيجاد قيمة المتغيرات الداخلة فيه والتي تؤدي إلى تعظيم أو تقليل الدالة لكن السؤال الذي يثار ماذا يحدث لو أراد المبرمج وضع قيمة متحركة ( غير ثابتة ) لأحد المعالم سواء كانت من ثوابت الجهة اليمنى للقيود أو في احد معالم دالة الهدف فكيف نجد حلا لهذا البرنامج الذي يطلق علية اسم البرنامج المعلمي ( **parametric programming** ) كذلك واجهت الرياضيين مشكلة التغيرات التي تحدث في معالم دالة الهدف أو ثوابت الجهة اليمنى للقيود بعد استكمال حل المسالة والوصول إلى الحل الأمثل. فكيف يكيف هذا الحل بعد اعتماد هذه التغيرات التي يشار إليها أحيانا بالحساسية (**sensitivity**)

ومن المسائل الأخرى التي واجهت الرياضيين هي الحدود الدنيا والحدود العليا لبعض أو لكل متغيرات البرنامج.

وعلى هذا الأساس وجدنا من المفيد تناول هذه المسائل الثلاث ونبدأ بالحدود الدنيا والعليا وكما يأتي:

## 7-2 طريقة السمبلكس المزدوجة The Dual Simplex Algorithm

ذكرنا في الفصل السادس أن حل البرنامج الخطي ذو القيود التي تحتوي على متباينات اكبر أو يساوي ($\geq$) يحتاج لطرح متغيرات إضافية ( **slack variables**) من

هذه القيود لغرض جعلها متساوية وعند وضع المسالة في الجدول الابتدائي نلاحظ أن قيما سالبة ستظهر في عمود القيم الأساسية ( **values**) وقد اضطررنا في حينه إلى إضافة متغيرات مصطنعة **(artificial variables)** وإجراء تعديلات في بنية الجدول الابتدائي لغرض تسهيل عملية الشروع في الحل حسب طريقة السمبلكس (راجع الفقرة 5-6) ولكن كانت عمليات الحل تتطلب المزيد من الحسابات والمعالجات الرقمية ولهذا فقد استنبط الرياضيون طريقة أخرى لأجل التغلب على هذه المشكلة سموها طريقة السمبلكس المزدوجة ( **dual simplex algorithm**) ودعنا نستعين بمثال لشرح خطوات حل البرنامج الخطي بهذه الطريقة:

$$\min Z = 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4$$

$$s.t.\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 \geq 10$$

$$3x_1 - x_2 + 7x_3 - 2x_4 \geq 2$$

$$5x_1 + 2x_2 + x_3 + 6x_4 \geq 15$$

$$x_1 \geq 0 \quad , \quad x_2 \geq 0 \quad , \quad x_3 \geq 0 \quad , \quad x_4 \geq 0$$

والآن نشرع في شرح خطوات الحل:

**الخطوة الأولى:**

نحول المتباينات من حالة ( **min**) إلى حالة ( **max**) وكالآتي:

$$-2x_1 - 4x_2 - 5x_3 - x_4 \leq -10$$

$$-3x_1 + x_2 - 7x_3 + 2x_4 \leq -2$$

$$-5x_1 - 2x_2 - x_3 - 6x_4 \leq -15$$

وذلك من أجل التخلص من إضافة متغيرات مصطنعة **(artificial variables)** عند تحويل هذه المتباينات إلى معادلات ولم نعد نحتاج إلا إلى إضافة متغيرات إضافية **(slack variables)** وبإدخال البرنامج في الجدول الابتدائي نحصل على:

| B | V | x1 | x2 | x3 | x4 | s1 | s2 | s3 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| s1 | -10 | | -2 | -4 | -5 | -1 | 1 | 0 | 0 |
| s2 | -2 | | -3 | 1 | -7 | 2 | 0 | 1 | 0 |
| s3 | -15 | (-5) | | -2 | -1 | -6 | 0 | 0 | 1 |
| Cj-Zj | 0 | | 3 | 2 | 1 | 4 | 0 | 0 | 0 |

**الخطوة الثانية:**

ننظر إلى: $\min(V_i)$ كي نحدد المتغير الذي يتعين أن يغادر عمود الأساس **(Basis)**.



وهنا يظهر أن: $v_1 = -10, v_2 - 2, v_3 = -15$

وإن $v_3 = -15$ هو الأقل وعلية فإن $(S_3)$ هو الذي يغادر من **(Basis)**.

**الخطوة الثالثة:**

ننظر إلى: $\max\left\{\frac{Cj - Zj}{a_{ij}}\right\}, a_{ij} < 0$ وذلك لتحديد المتغير الداخل ومنه نحدد المحور **(pivot)** الذي ستجري بموجبه العمليات الحسابية في الدورة الأولى للعمل. وهنا يظهر أن: $\max\left\{\frac{Cj - Zj}{a_{ij}}\right\}, a_{ij} < 0$ يعطي النتائج الآتية:

$$\frac{c_1 - z_1}{a_{31}} = \frac{3}{-5}, \frac{c_2 - z_2}{a_{32}} = \frac{2}{-2}, \frac{c_3 - z_3}{a_{33}} = \frac{1}{-1}$$

وفيها يتضح بأن أعلى (max) هـذه النتـائج هـي $\frac{c_1 - z_1}{a_{31}} = -\frac{3}{5}$ وعليـه فإن ($a_{31}$) يكـون هـو المحور ( pivot) أي العدد (-5).

**الخطوة الرابعة:**

بعد تعيين المحور نشرع في الحل حسب الطريقة المعتادة للسمبلكس فنحصل على:

| B | V | x1 | x2 | x3 | x4 | s1 | s2 | s3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| s1 | -4 | 0 | $-\frac{16}{5}$ | $-\frac{23}{5}$ | $\frac{7}{5}$ | 1 | 0 | $-\frac{2}{5}$ |
| s2 | 7 | 0 | $\frac{11}{5}$ | $-\frac{32}{5}$ | $\frac{28}{5}$ | 0 | 1 | $-\frac{3}{5}$ |
| x1 | 3 | 1 | $\frac{2}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{6}{5}$ | 0 | 0 | $-\frac{1}{5}$ |
| Cj-Zj | -9 | 0 | $\frac{4}{5}$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{2}{5}$ | 0 | 0 | $\frac{3}{5}$ |

الآن نعود إلى الخطوة الثانية ويظهر بأن:

($S_1$) هو المتغير الـذي يغـادر حـسب الخطـوة الثانيـة وإن ($X_3$) هـو المتغـير الـذي يـدخل حـسب الخطوة الثالثة وعلية نحصل على الجدول الآتي:

| B | V | x1 | x2 | x3 | x4 | s1 | s2 | s3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x3 | $\frac{20}{23}$ | 0 | $\frac{16}{23}$ | 1 | $-\frac{7}{23}$ | $\frac{5}{23}$ | 0 | $\frac{2}{23}$ |
| s2 | $\frac{289}{23}$ | 0 | $\frac{765}{115}$ | 0 | $\frac{420}{115}$ | $\frac{160}{115}$ | 1 | $\frac{5}{115}$ |
| x1 | $\frac{65}{23}$ | 1 | $\frac{6}{23}$ | 0 | $\frac{29}{23}$ | $\frac{1}{23}$ | 0 | $-\frac{5}{23}$ |
| Cj-Zj | $-\frac{215}{23}$ | 0 | $\frac{12}{23}$ | 0 | $\frac{12}{23}$ | $\frac{2}{23}$ | 0 | $\frac{10}{23}$ |

إذن توصلنا إلى جدول الحل الأمثل بدورتين فقط.

وهو: $x_1 = \frac{65}{23}, x_2 = 0, x_3 = \frac{20}{23}, z = \frac{215}{23}$

## 7-3 الحدود الدنيا و العليا Upper and Lower bounds

وتتلخص هذه المسألة في وجود قيود جديدة في البرنامج تحل محل قيود عدم السلبية التي اعتـدنا ملاحظتها في البرنامج الاعتيادي. لنأخذ أولا الحدود الدنيا ( **Lower bounds** ) ونفترض لدينا البرنامج الآتي:

$$\max \quad Z = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3$$

$$s.t. \quad x_1 + 2x_2 + x_3 \le 10$$

$$3x_1 + x_2 + 7x_3 \le 15$$

$$x_1 \ge 2 \quad , \quad x_2 \ge 1 \quad , \quad x_3 \ge 0$$

ويمكن إعادة كتابة البرنامج في ضوء القيود الجديدة كما يلي:

لنأخذ: $x_1 \ge 2$

$$x_1 - x_1' = 2 \qquad x_2' \ge 0$$

$$x_1 = 2 + x_1' \qquad x_1' \ge 0$$

وبالمثل فأن:

$$x_2 - x_2' = 1 \qquad x_2' \ge 0$$

$$x_2 = 1 - x_2' \qquad x_2' \ge 0$$

أما: $X_3$ فانه يخضع لقيد عدم السلبية فقط.

إذن يصبح البرنامج كما يلي:

$$\max \quad Z = 3(2+x_1') + 2(1+x_2') + 4x_3$$

$$s.t. \quad (2+x_1') + 2(1+x_2') + x_3 \le 10$$

$$3(2+x_1') + (1+x_2') + 7x_3 \le 15$$

$$x_1' \ge 0 \quad , \quad x_2' \ge 0 \quad , \quad x_3 \ge 0$$

أي أن البرنامج يؤول إلى:

$$\max \quad Z = 3x_1' + 2x_2' + 4x_3 + 8$$

$$s.t. \quad x_1' + 2x_2' + x_3 \le 6$$

$$3x_1' + x_2' + 7x_3 \le 8$$

$$x_1' \ge 0 \quad , \quad x_2' \ge 0 \quad , \quad x_3 \ge 0$$

أما الحدود العليا ( **Upper bounds** ) فإن التعامل معها يأخذ مساراً آخر فلو افترضنا بأن لدينا القيد الآتي:

$$x_1 \le 1$$

$$x_1 + x_1' = 1$$

فأن:

$$x_1 = 1 - x_1'$$

وهنا يلاحظ بأننا لم نفعل شيئا حيث لازال لدينا: $x_1' \le 1$ ومادام $x_1 \ge 0$ حسب شروط عدم السلبية ولتلافي هذه المشكلة يقترح أن نسير بالحل متجاهلين قدر الإمكان الحدود العليا وعندما تخترق متطلبات هذه الحدود فعند ذاك قد نلجأ إلى بعض التعويضات المناسبة. فعلى سبيل المثال إذا توصلنا في حقل القيم الأساسية للحل إلى قيمة مثل ( $x_1 = 2$ ) في حين يقضي الحد الأعلى أن تكون $x_1 \le 1$ وهذا يعني أن:

$$x_1' = 1 - x_1 = 1 - 2 = -1$$

وهنا اخترقنا شروط عدم السلبية في $x_1'$ .

قد يساعد تناول مثال على فهم ومتابعة كيفية حل برنامج خطي مثقل بشروط الحدود العليا والسفلى وكما يأتي:

لنأخذ المثال الآتي:

$$\max \quad Z = 2x_1 + x_2 + 3x_3$$

$$s.t. \quad x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 7$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 8$$

$$0 \leq x_1 \leq 1 \ , \quad x_2 \geq 0 \ , \ 0 \leq x_3 \leq 2$$

<u>الجواب:</u>

**الخطوة الأولى**: نجد الحل الأمثل بدون الحدود العليا والدنيا وكالآتي:



| B | V | x1 | x2 | x3 | s1 | s2 | Check |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| s1 | 7 | 1 | 4 | (2) | | 0 | 15 |
| s2 | 8 | 3 | 2 | 1 | 0 | 1 | 15 |
| Zj-Cj | 0 | -2 | -1 | -3 | 0 | 0 | -6 |
| x3 | $\frac{7}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 2 | 1 | $\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{13}{2}$ |
| s2 | $\frac{9}{2}$ | ($\frac{5}{2}$) | 0 | 0 | | (T $\frac{1}{2}$) | $\frac{15}{2}$ |
| Zj-Cj | | $-\frac{1}{2}$ | 5 | 0 | $\frac{3}{2}$ | 0 | $\frac{33}{2}$ |
| x3 | $\frac{13}{5}$ | 0 | 2 | 1 | $\frac{3}{5}$ | $-\frac{1}{5}$ | 6 |
| x1 | $\frac{9}{5}$ | 1 | 0 | 0 | $-\frac{1}{5}$ | $\frac{2}{5}$ | 3 |
| Zj-Cj | $\frac{57}{5}$ | 0 | 5 | 0 | $\frac{7}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | 18 |

إذن الحل الأمثل بدون الحدود هو $x_1 = \frac{9}{5}, x_2 = 0, x_3 = \frac{13}{5}, Z = \frac{57}{5}$

**الخطوة الثانية:**

نأخذ اكبر قيمة غير مقبولة ( **Largest infeasibility** ) ونستخرج هذه القيمة من الحدود نفسها أي من: $(2 \le x_3 \le 0), (1 \le x_1 \le 0)$ وكما يأتي:

لدينا: $x_1 \le 1$

إذن القيمة غير المقبولة هي: $1 - \frac{9}{5} = -\frac{4}{5}$

كما لدينا: $x_3 \le 2$

إذن القيمة غير المقبولة هي: $2 - \frac{13}{5} = -\frac{3}{5}$

ويظهر من النتائج أن اكبر قيمة غير مقبولة هي $(-\frac{4}{5})$ ذات العلاقة بالحد $0 \le x_1 \le 1$

وحيث لدينا من جدول الحل الأمثل ما يلي:

$$\frac{9}{5} = x_1 - \frac{1}{5}s_1 + \frac{2}{5}s_2$$

وما علينا إلا أن نعوض: $x_1 = 1 - x_1'$ في المعادلة أعلاه فينتج:

$$\frac{9}{5} = (1 - x_1') - \frac{1}{5}s_1 + \frac{2}{5}s_2$$

$$\frac{4}{5} = -x_1' - \frac{1}{5}s_1 + \frac{2}{5}s_2$$

ولأجل أن نحصل على صيغة قانونية ( **Canonical form** ) نضرب المعادلة الأخيرة في (1-)

لينتج:

$$-\frac{4}{5} = x_1' + \frac{1}{5}s_1 - \frac{2}{5}s_2$$

والآن ندخل ذلك في الجدول الأخير لتحل محل الصف $x_1$ ونواصل الحل:

| B | V | x1 | x2 | x3 | s1 | s2 | Check |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x1 | $\frac{13}{5}$ | 0 | 2 | 1 | $\frac{3}{5}$ | $-\frac{1}{5}$ | 6 |
| $x_2'$ | $-\frac{4}{5}$ | 1 | 0 | 0 | $\frac{1}{5}$ | $-\frac{2}{5}$ (circled) | 0 |
| Zj-Cj | $\frac{57}{5}$ | 0 | 5 | 0 | $\frac{7}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | 18 |
| x3 | 3 | $-\frac{1}{2}$ | 2 | 1 | $\frac{1}{2}$ | 0 | 6 |
| s2 | 2 | $-\frac{5}{2}$ | 0 | 0 | $-\frac{1}{2}$ | 1 | 0 |
| Zj-Cj | 11 | $\frac{1}{2}$ | 5 | 0 | $\frac{15}{10}$ | 0 | 18 |



والآن أكملنا معالجة الحد الأعلى الأول وبهذا ننتقل إلى الحد الأعلى الثاني وهو: $0 \le x_3 \le 2$

وحيث لدينا من الجدول الأخير ما يأتي:

$$3 = -\frac{1}{2}x_1' + 2x_2 + x_3 + \frac{1}{2}s_1$$

وما علينا إلا أن نعوض: $x_3 = 2 - x_3'$ في المعادلة أعلاه فنحصل على:

$$3 = -\frac{1}{2}x_1' + 2x_2 + (2 - x_3') + \frac{1}{2}s_1$$

$$1 = -\frac{1}{2}x_1' + 2x_2 - x_3' + \frac{1}{2}s_1$$

ولأجل الحصول على الصيغة القانونية نضرب في ( 1- ) لينتج:

$$-1 = \frac{1}{2}x_1' - 2x_2 + x_3' - \frac{1}{2}s_1$$

والآن ندخل هذه المعادلة في الجدول الأخير بدلاً من الصف ($x_3$) ونواصل الحل:

| B | V | $x_1'$ | $x_2$ | $x_3'$ | $s_1$ | $s_2$ | Check |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_3'$ | -1 | $\frac{1}{2}$ | -2 | 1 | $-\frac{1}{2}$ | 0 | -2 |
| $s_2$ | 2 | $-\frac{5}{2}$ | 0 | 0 | $-\frac{1}{2}$ | 1 | 0 |
| $Z_j - C_j$ | 11 | $\frac{1}{2}$ | 5 | 0 | $\frac{3}{2}$ | 0 | 18 |
| $x_2$ | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{4}$ | 1 | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | 0 | 1 |
| $s_2$ | 2 | $-\frac{5}{2}$ | 0 | 0 | $-\frac{1}{2}$ | 1 | 0 |
| $Z_j - C_j$ | $\frac{17}{2}$ | $\frac{7}{4}$ | 0 | $\frac{5}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | 0 | 13 |

ومن الجدول يظهر أن:

$$x_1' = 0 \;,\; x_2 = \tfrac{1}{2} \;,\; x_3' = 0 \;,\; S_1 = 0 \;,\; S_2 = 2 \;,\; Z = \tfrac{17}{2}$$

ولما كان:

$x_1 = 1 - x_1'$ إذن: $x_1 = 1 - 0 = 1$

$x_3 = 2 - x_3'$ إذن: $x_3 = 2 - 0 = 2$

وعليه فإن الحل الأمثل للبرنامج هو:

$$x_1 = 1 \;,\; x_2 = \tfrac{1}{2} \;,\; x_3 = 2 \;,\; S_1 = 0 \;,\; S_2 = 2 \;,\; Z = \tfrac{17}{2}$$

ومن الحل يتبين أن الحدود العليا قد أدت إلى انخفاض القيمة العظمى التي توصلنا إليها بدون هذه الحدود من $\frac{57}{5}$ إلى $\frac{17}{12}$ أي أن تكاليف هذه الحدود والمحسوبة بمقدار انخفاض الأرباح مثلاً هي:

$$\frac{57}{5} - \frac{17}{2} = \frac{29}{10} = 2.9$$

## 7-4 البرمجة الخطية المعلمية Parametric Programming

لقد سميت هذه البرامج بالمعلمية كما ذكرنا لكونها تحتوي على معالم بدلاً من القيم الثابتة سواء كانت في دالة الهدف أو وفي الجهة اليمنى من القيود ولهذا فهي تقسم إلى قسمين وكما يأتي:

**1- معالم الجهة اليمنى**

وتعني بان واحد أو أكثر من ثوابت الجهة اليمنى من القيود يأخذ صيغة معلمية كما في الآتي:

$$\min\ Z = x_1 + 2x_2$$

$$s.t.\ \ 2x_1 + 5x_2 \geq 6$$

$$x_1 + x_2 \geq k$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$



وواضح في هذه المسألة الخطية أن الجهة اليمنى من القيد الثاني لم تحدد لها قيمة ثابتة كما هو معتاد بل تركت لتساوي معلمة أطلق عليها ( k ). ويمكن أن تكون جميع ثوابت الجهة اليمنى معلمية وعند ذاك تسمى المسألة بالبرمجة المعلمية الكاملة (full parametric programming ) ألا أننا سنقتصر الحديث على مسألة ذات معلمة واحدة وذلك بهدف التبسيط وعدم تعقيد الشروحات التي تتعلق بالحل.

**وتتلخص خطوات الحل بما يلي:**

1- نقرر المدى الذي تتحرك فيه ( k ) وفي المسألة أعلاه ما دامت $x_1 , x_2 \geq 0$ فإن مدى **k** هو:

$$0 \leq k \leq \infty$$

2- نقرر الكيفية التي نحرك فيها ( k ) وعادة ما يبدأ التحريك من النهاية السفلى لحين بلوغ النهاية العليا.

3- عدم خرق الحل الممكن أثناء عملية تحريك (k) من قيمة إلى أخرى. وهذا يعني إذا لم تؤدي قيمة معينة لـ (k) إلى أي حل فلا بد هنا من التفتيش عن قيمة أخرى لـ (k) لها نفس التأثير.

والآن دعنا نحل المثال أعلاه بطريقة السمبلكس لنرى:

**الخطوة الأولى:** نبدأ بـ $k = 0$

| B | V | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | Check |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | 6 | 2 | 5 | -1 | 0 | 12 |
| $a_2$ | k | 1 | 1 | 0 | -1 | k+1 |
| $Z_j - C_j$ | 0 | 1 | 2 | 0 | 0 | 3 |
| $C_j^* - G_j$ | -6-k | -3 | -6 | 1 | 1 | -13-k |
| $a_1$ | 6-5 k | -3 | 0 | -1 | 5 | 5k-7 |
| $x_2$ | k | 1 | 1 | 0 | -1 | k +1 |
| $Z_j - C_j$ | -2k | -1 | 0 | 0 | 2 | 1-2k |
| $C_j^* - G_j$ | 5k -6 | 3 | 0 | 1 | -5 | 5k-7 |

<u>لاحظ</u>: من اجل المحافظة على الحل الممكن في الخطوة أعلاه لابد أن تكون $k \le \frac{6}{5}$ حيث أن $a_1 = 6-5k$ ولكي تبقى قيمة $a_1$ غير سالبة لا بد من ( $a_1 = 6-5\times\frac{6}{5}=0$ ) وهنا نكون قد تحركنا من $k \ge 0$ إلى $k \le \frac{6}{5}$ ونواصل الآن الحل:

| B | V | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | Check |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $s_2$ | $\frac{6}{5}-k$ | $-\frac{3}{5}$ | 0 | $-\frac{1}{5}$ | 1 | $\frac{2}{5}-k$ |
| $x_2$ | $\frac{6}{5}$ | $\frac{2}{5}$ | 1 | $-\frac{1}{5}$ | 0 | $\frac{12}{5}$ |
| $C_j - Z_j$ | $-\frac{12}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | 0 | $\frac{2}{5}$ | 0 | -2 |

لاحظ: من اجل المحافظة على الحل الأمثل ودون خرق الشروط عدم سلبية لا بد من $k \leq \frac{6}{5}$ كي تكون قيمة $s_2 \geq 0$ الموجودة في عمود القيم الأساسية. وعند هذه الخطوة فإن الحل الأمثل عند $0 \leq k \leq \frac{6}{5}$ هو:

$$x_1 = 0 \ , \quad x_2 = \frac{6}{5} \ , \ Z = \frac{12}{5}$$

والآن إذا زيدت قيمة k بأي مقدار صغير وليكن $\varepsilon$ فان: $k = \frac{6}{5} + \varepsilon$ أي أن تكون $k > \frac{6}{5}$ وبهذا فإن $s_2$ تصبح ضمن الحلول غير الممكنة (infeasible) وهذا ما يزيحها عن منطقة الحلول الممكنة حسب طريقة السمبلكس المزدوجة (dual simplex) وكما في الخطوة الآتية:

| B | V | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | Check |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $\frac{5}{3}k - 2$ | 1 | 0 | $\frac{1}{3}$ | $-\frac{5}{3}$ | $\frac{5}{3}k - \frac{7}{3}$ |
| $x_2$ | $2 - \frac{2}{3}k$ | 0 | 1 | $-\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{10}{3} - \frac{2}{3}k$ |
| $C_j - Z_j$ | $-2 - \frac{k}{3}$ | 0 | 0 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $-\frac{4}{3} - \frac{k}{3}$ |

الفصل السابع

**والآن ماذا كانت النتيجة؟**

يلاحظ بأنه من أجل المحافظة على الحل الأمثل أعلاه لابد أن تكون $k \leq 3$ أي أن: $\frac{6}{5} \leq k \leq 3$ وعندها يكون الحل الأمثل:

$$x_1 = \frac{5}{3}k - 2 \ , \quad x_2 = 2 - \frac{2}{3}k \ , \ Z = 2 + \frac{k}{5}$$

ولكن ماذا سيحدث لو أصبحت: $k > 3$ فإن $x_2$ يصبح ضمن الحلول غير الممكنة ( **infeasible** ) وهذا ما يزيحه من منطقة الحلول الممكنة أي من عمود المتغيرات الأساسية ( **basis** ) حسب طريقة السمبلكس المزدوجة ( **dual simplex** ) وكما موضح في الخطوة الآتية:

| B | V | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | Check |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $k$ | 1 | 1 | 0 | -1 | $k+1$ |
| $s_1$ | $2k-6$ | 0 | -3 | 1 | 2 | $2k-6$ |
| $C_j-Z_j$ | $-k$ | 0 | 1 | 0 | 1 | $2-k$ |

**والآن إلى أين توصلنا؟**

عندما تكون $3 \le k \le \infty$ فإن الحل الأمثل هو:

$$x_1 = k \;\;,\;\; x_2 = 0 \;,\; Z = k$$

وعليه يكون بالمستطاع أدراج النتائج التالية التي توضح التطورات في قيمة k وما يقابلها من

تطورات في قيمة Z:

| k | Z |
|---|---|
| $0 \le k \le \frac{6}{5}$ | $\frac{12}{5}$ |
| $\frac{6}{5} \le k \le 3$ | $2+\frac{k}{3}$ |
| $3 \le k \le \infty$ | k |

2- معالم دالة الهدف **Parametric Objective Function**

وتعني أن يحتوي البرنامج الخطي على معالم متحركة بدلا من المعالم الثابتة (القيم) لدالة الهدف.

مثال ذلك:

$$\max \;\; Z = kx_1 + 2x_2 + 4x_3$$

$$s.t. \;\; x_1 + 3x_2 + x_3 \le 6$$

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 \le 8$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \;, \quad x_3 \ge 0$$

ويستخدم الأسلوب نفسه المبين في البرنامج المعلمي في الجهة اليمنى الذي مر شرحه في الفقرة السابقة ولكن قد يختلف اتجاه تحريك قيمة **k** حسب طبيعة المسألة لنأخذ المثال أعلاه ونحاول السير في حله ونرى الكيفية التي تتم بها إجراءات الحل:

**الخطوة الأولى:** نبدأ بالحل بـ $k = -\infty$

| B | V | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $s_1$ | $s_2$ | Check |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $s_1$ | 6 | 1 | 3 | 1 | 1 | 0 | 12 |
| $s_2$ | 8 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 15 |
| $Z_j - C_j$ | 0 | -k | -2 | -4 | 0 | 0 | - k - 6 |
| $s_1$ | 2 | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{5}{2}$ | 0 | 1 | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{9}{2}$ |
| $x_3$ | 4 | $\frac{3}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{15}{2}$ |
| $Z_j - C_j$ | 16 | 6-k | 0 | 0 | 0 | 2 | 24 - k |



**والآن إلى ماذا توصلنا ؟**

نقول لكي نحافظ على الحل الأمثل الذي توصلنا إليه لابد من أن تكون: $k \leq 6$ وعليه فانه عندما تكون $-\infty \leq k \leq 6$ فإن الحل الأمثل هو:

$$x_1 = 0 \ , \quad x_2 = 0 \ , \quad x_3 = 4 \ , \quad Z = 16$$

ولكن ماذا سيحدث أو أصبحت $k > 6$ فإن $x_1$ يصبح مؤهلا للدخول إلى عمود المتغيرات الأساسية (**basis**) حسب طريقة السمبلكس الاعتيادية (**primal simplex**) ودعنا نطلع على ذلك في الخطوة التالية:

| B | V | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $s_1$ | $s_2$ | Check |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $s_1$ | $\frac{10}{3}$ | 0 | $\frac{8}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | 1 | $-\frac{1}{3}$ | 7 |
| $x_1$ | $\frac{8}{3}$ | 1 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | 0 | $\frac{1}{3}$ | 5 |
| $Z_j - C_j$ | $\frac{8k}{3}$ | 0 | $\frac{k}{3}-3$ | $\frac{2k}{3}-4$ | 0 | $\frac{k}{3}$ | 4k - 6 |

ويبدو عند هذه الخطوة أننا توصلنا إلى الحل الأمثل عندما تكون:

$6 \le k \le \infty$ وعند ذاك تكون: $x_1 = \frac{8}{3}\ ,\ \ x_2 = 0\ ,\ x_3 = 0\ ,\ Z = \frac{8k}{3}$

لقد شرحنا كيفية حل البرنامج الخطي المعلمي في دالة الهدف إذا كانت إحدى القيم المعلمية لمتغيرات هذه الدالة متحركة أي ( k ) ولكن ماذا يحدث لو احتوت دالة الهدف أكثر من معلمة متحركة مثل:

$$Z = k_1 x_1 + k_2 x_2$$

فإن معالجة هذه الحالة تتم بقسمة الدالة على $k_2$ ( أو $k_1$ ) لينتج:

$$\frac{Z}{k_2} = \frac{k_1}{k_2} x_1 + x_2$$

وبافتراض أن:

$$t = \frac{Z}{k_2} \quad \text{و} \quad k = \frac{k_1}{k_2}$$

فإن:

$$t = k x_1 + x_2$$

وعندها يمكن حل البرنامج حسب الطريقة التي شرحناها أعلاه وبعد الانتهاء من الحل يجري تعويض النتائج بـ:

$$t = \frac{Z}{k_2} \quad \text{و} \quad k = \frac{k_1}{k_2}$$

## 7-5 تحليل الحساسية Sensitivity Analysis

ويقصد بتحليل الحساسية قياس درجة تأثر عموم مكونات البرنامج الخطي وبدرجة خاصة قيمة الحل الأمثل عندما تتغير قيمة إحدى القيم المطلقة في الجهة اليمنى من القيود أو عندما تتغير إحدى معالم متغيرات دالة الهدف ودعنا نبدأ بشرح الحالة الأولى:

1- تحليل الحساسية عندما تتغير القيم المطلقة في الجهة اليمنى من القيود:

إن هذا التغير يشمل واحداً أو أكثر من القيم المطلقة في الجهة اليمنى من القيود ولغرض التبسيط سنكتفي بحساب حساسية نتائج البرنامج عندما تتغير قيمة مطلقة واحدة ولنبدأ بالمثال الآتي:

في مشروع لزراعة الرز كانت المواد المستخدمة تتكون من: الأرض ومساحتها (10) والمياه وحصتها (8) والعملة الأجنبية ومقدارها (9) وبذور الرز وزنتها (2) وكل هذه الحصص مقاسة بوحدات كل حسب طبيعتها. وقد وضع البرنامج التالي لإنتاج ثلاثة أنواع من الرز:

$$\max.\ Z = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3$$

$$st.\ \ x_1 \geq 2 \qquad \text{(المتطلبات من بذور الرز)}$$

$$7x_2 + 3x_3 \geq 9 \qquad \text{(العملة الأجنبية)}$$

$$4x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 10 \qquad \text{(الأرض)}$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 8 \qquad \text{(المياه)}$$

$$x_1 \geq 0 \ ,\ \ x_2 \geq 0 \ ,\ \ x_3 \geq 0$$

ولأجل بيان حساسية كل مورد على حدة دعنا نفترض أن المياه يمكن أن تتغير بمقدار $(+\delta)$ أي تصبح مواردها بمقدار $(8+\delta)$ وإذا ما باشرنا بحل البرنامج فإن الجدول الابتدائي يكون على الشكل الآتي:

| B | V | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | 2 | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 |
| $a_2$ | 9 | 0 | 7 | 3 | 0 | -1 | 0 | 0 |
| $s_3$ | 10 | 4 | 1 | 2 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $s_4$ | $8+\delta$ | 2 | 3 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $Z_j - C_j$ | 0 | -3 | -2 | -4 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $C_j^* - G_j$ | -11 | -1 | -7 | -3 | 1 | 1 | 0 | 0 |

وعند مواصلة الحل فإن الحل الأمثل الذي نتوصل إليه يظهر كما يأتي:

| B | V | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 2 | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 |
| $x_2$ | $\frac{12}{11}$ | 0 | 1 | 0 | $-\frac{12}{11}$ | $\frac{2}{11}$ | $\frac{3}{\pi}$ | 0 |
| $x_3$ | $\frac{5}{11}$ | 0 | 0 | 1 | $\frac{28}{11}$ | $\frac{1}{11}$ | $\frac{7}{11}$ | 0 |
| $s_4$ | $\frac{3}{11}+\delta$ | 0 | 0 | 0 | $\frac{30}{11}$ | $\frac{5}{11}$ | $\frac{2}{11}$ | 1 |
| $Z_j - C_j$ | 10 | 0 | 0 | 0 | 5 | 0 | 2 | 0 |

ولكي نحافظ على هذا الحل الأمثل ولا نخرق منطقة الحلول الممكنة لا بد وان تكون: $\frac{3}{11}+\delta \geq 0$

أي أن: $-\frac{3}{11} \leq \delta \leq \infty$ وهـذا يعنـي أن كميـة الميـاه يمكـن أن تتغـير ضـمن مـدى معـين يقـع بـين $(8-\frac{3}{11}=\frac{85}{11})$ و $(8+\delta=\infty)$ أي أن: $\frac{85}{11} \leq$ المياه $\leq \infty$ والآن ماذا لو سمح لمساحة الأرض أن تـزداد بمقدار $(+\delta)$ أي تصبح $(10+\delta)$ وعندها يكون الجدول الابتدائي حسب الشكل الآتي:

| B | V | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | 2 | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 |
| $a_2$ | 9 | 0 | 7 | 3 | 0 | -1 | 0 | 0 |
| $s_3$ | $10+\delta$ | 4 | 1 | 2 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $s_4$ | 8 | 2 | 3 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $Z_j-C_j$ | 0 | -3 | -2 | -4 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $C_j^*-G_j$ | -11 | -1 | -7 | -3 | 1 | 1 | 0 | 0 |

وعند مواصلة عمليات الحل نبلغ الحل الأمثل الذي يظهر كما يلي:

| B | V | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 2 | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 |
| $x_2$ | $\frac{12}{11}-\frac{3}{11}\delta$ | 0 | 1 | 0 | $-\frac{12}{11}$ | $-\frac{2}{11}$ | $\frac{3}{11}$ | 0 |
| $x_3$ | $\frac{5}{11}+\frac{7}{11}\delta$ | 0 | 0 | 1 | $\frac{28}{11}$ | $\frac{1}{11}$ | $\frac{7}{11}$ | 0 |
| $s_4$ | $\frac{3}{11}+\frac{2}{11}\delta$ | 0 | 0 | 0 | $\frac{30}{11}$ | $\frac{5}{11}$ | $\frac{2}{11}$ | 1 |
| $Z_j-C_j$ | $10+2\delta$ | 0 | 0 | 0 | 5 | 0 | 2 | 0 |



**ومن الحل يتضح ما يلي:**

لكي نحافظ على الحل الأمثل في الجدول وتكون ضمن منطقة الحلول الممكنة أعلاه لا بد من:

أذن:

$$\frac{3}{11}+\frac{2}{11}\delta \geq 0 \qquad \frac{5}{11}+\frac{7}{11}\delta \geq 0 \qquad \frac{12}{11}-\frac{3}{11}\delta \geq 0$$

$$\delta \geq -\frac{3}{2} \qquad \delta \geq -\frac{5}{7} \qquad \delta \leq 4$$

وهذا يعني أن المدى الذي يمكن أن تتحرك به $\delta$ هو:

$$-\frac{5}{7} \leq \delta \leq 4$$

وهــذا يوضــح بــان مــساحة الأرض يمكــن أن تتغــير بــين المــساحتين $\left(10-\frac{5}{7}=\frac{65}{7}\right)$ و

$(10+4=14)$ أي أن تأخذ مدى التغير الآتي:

$$\frac{65}{7} \leq \text{مساحة الأرض} \leq 14$$

دون أي تبدل في المتغيرات الموجودة في عمود القيم الأساسية ( **basis** ).

والآن ماذا لو حدث تغير في كمية العملات الأجنبية اللازمة للمشروع وهذا التغير يمكن أن يكون بمقدار $(-\delta)$ وهنا كان التغير سالباً لان قيد العملات الأجنبية يتطلب أن تكون قيمة ما يستخدم من هذه العملات أكثر أو يساوي وعليه فإن الحساسية التي تخضع للاختبار يتعين أن تنصب على التغير الذي ينخفض بمقدار المستخدم من العملات الأجنبية عن (9) على العكس مما في قيدي المياه والأرض حيث كان التغير المعد لاختبار الحساسية هو $(+\delta)$ لان هذا الاختيار يتطلب الارتفاع بمستوى الموارد من الأرض والمياه إلى مستوى يزيد عن (10)، (8) على التوالي.

وإذا ما أدخلنا التغير في العملات الأجنبية لتصبح $(9-\delta)$ في الجدول الابتدائي وشرعنا في الحل فسنصل إلى جدول الحل الأمثل الذي يحتوي على العناصر الآتية:

| B | V | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x1 | 2 | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 |
| x2 | $\frac{12}{11}-\frac{2}{11}\delta$ | 0 | 1 | 0 | $-\frac{2}{11}$ | $-\frac{12}{11}$ | $-\frac{3}{11}$ | 0 |
| x3 | $\frac{5}{11}+\frac{1}{11}\delta$ | 0 | 0 | 1 | $\frac{28}{11}$ | $\frac{1}{11}$ | $\frac{7}{11}$ | 0 |
| s4 | $\frac{3}{11}+\frac{5}{11}\delta$ | 0 | 0 | 0 | $\frac{30}{11}$ | $\frac{5}{11}$ | $\frac{2}{11}$ | 1 |
| Zj-Cj | 10 | 0 | 0 | 0 | 5 | 0 | 2 | 0 |

ومن الحل يظهر أن الحل الأمثل هو:

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = \frac{12}{11} - \frac{2}{11}\delta$$

$$x_3 = \frac{5}{11} + \frac{1}{11}\delta$$

$$z = 10$$

ولكي نحافظ على هذا الحل كحل امثل وممكن يتعين أن تكون:

$$\frac{12}{11} - \frac{2}{11}\delta \geq 0 \quad \frac{5}{11} + \frac{1}{11}\delta \geq 0 \quad \frac{3}{11} + \frac{5}{11}\delta \geq 0$$

$$6 \leq \delta \qquad \delta \geq -5 \qquad \delta \geq -\frac{3}{5}$$

أي أن المدى الذي يمكن أن تتغير فيه $\delta$ ويبقى الحل الأمثل نافذاً هو:



$$-\frac{3}{5} \leq \delta \leq 6$$

وان مدى تغير الموارد من العملات الأجنبية كانت هو:

$$3 \leq \text{العملات الأجنبية} \leq \frac{48}{5}$$

لاحظ بأن حساسية العملات الأجنبية كانت ( $9 - \delta$ ) ولهذا فإن طرفي المدى يستخرجان كالآتي:

$$9 - (-\frac{3}{5}) = \frac{48}{5}$$

$$9 - (6) = 3$$

وبالمثل إذا افترضنا بان متطلبات البذور من الرز تتغير بمقدار ($\delta$-) لتكون ($2-\delta$) وبإدخال ذلك في جدول السمبلكس الابتدائي وحل النموذج نحصل على:

$$2-\delta \geq 0\ , \frac{12}{11}-\frac{12}{11}\delta \geq 0,\ \frac{5}{11}+\frac{28}{11}\delta \geq 0,\ \ \frac{3}{11}+\frac{30}{11}\delta \geq 0$$

إذن:

$$\delta \leq 2 \qquad \delta \leq 1 \qquad \delta \geq -\frac{5}{28} \qquad \delta \geq -\frac{1}{10}$$

وعلى هذا الأساس فإن المدى الذي يمكن تتغير فيه $\delta$ ويبقى الحل الأمثل قائماً هو:

$$-\frac{1}{10} \leq \delta \leq 1$$

والمجال الذي يمكن لمتطلبات البذور أن تتحرك فيه مع بقاء نفس المتغيرات في عمود القيم الأساسية (basis) هو بين ( 1 ) و ( $\frac{21}{10}$ ).

أي أن:

$$1 \leq \text{كمية البذور} \leq \frac{21}{10}$$

والآن دعنا ندخل جميع التغيرات التي طرأت على القيم المطلقة في الجهة اليمنى مرة واحدة ونضع ذلك في الجدول الابتدائي وكما يأتي:

| B | V | x1 | x2 | x3 | s1 | s2 | s3 | s4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a1 | $2-\delta_1$ | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 |
| a2 | $9-\delta_2$ | 0 | 7 | 3 | 0 | -1 | 0 | 0 |
| s3 | $10+\delta_3$ | 4 | 1 | 2 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| s4 | $8+\delta_4$ | 2 | 3 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| Zj-Cj | 0 | -3 | -2 | -4 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| C*j-Gj | -11 | -1 | -7 | -3 | 1 | 1 | 0 | 0 |

وإذا شرعنا بالحل فسنحصل على جدول الحل الأمثل وكما يلي:

| B | V | x1 | x2 | x3 | s1 | s2 | s3 | s4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x1 | $2-\delta_1$ | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 |
| x2 | $\frac{12}{11}-\frac{12}{11}\delta_1-\frac{2}{11}\delta_2-\frac{3}{11}\delta_3$ | 0 | 1 | 0 | $-\frac{12}{11}$ | $-\frac{2}{11}$ | $-\frac{3}{11}$ | 0 |
| x3 | $\frac{5}{11}+\frac{28}{11}\delta_1+\frac{1}{11}\delta_2+\frac{7}{11}\delta_3$ | 0 | 0 | 1 | $\frac{28}{11}$ | $\frac{1}{11}$ | $\frac{7}{11}$ | 0 |
| s4 | $\frac{3}{11}+\frac{30}{11}\delta_1+\frac{5}{11}\delta_2+\frac{2}{11}\delta_3+\delta_4$ | 0 | 0 | 0 | $\frac{30}{11}$ | $\frac{5}{11}$ | $\frac{2}{11}$ | 1 |
| Zj-Cj | $10+5\delta_1+2\delta_2$ | 0 | 0 | 0 | 5 | 0 | 2 | 0 |

ولكي نبقي على هذا الحل نافذاً لابد وان تكون القيم في عمود القيم الأساسية(**Basis**) غير سالبة

أي أن:

**الفصل السابع**

$$2-\delta_1 \geq 0$$

$$\frac{12}{11}-\frac{12}{11}\delta_1-\frac{2}{11}\delta_2-\frac{3}{11}\delta_3 \geq 0$$

$$\frac{5}{11}+\frac{28}{11}\delta_1+\frac{1}{11}\delta_2+\frac{7}{11}\delta_3 \geq 0$$

$$\frac{3}{11}+\frac{30}{11}\delta_1+\frac{5}{11}\delta_2+\frac{2}{11}\delta_3+\delta_4 \geq 0$$

وبإعادة تكييف هذا المتباينات ينتج ما يأتي:

$$\delta_1 \leq 2$$

$$12\delta_1+2\delta_2+3\delta_3 \leq 12$$

$$28\delta_1+\delta_2+7\delta_3 \geq -5$$

$$30\delta_1+5\delta_2+2\delta_3+11\delta_4 \geq -3$$

وتوضح لنا هذه المتباينات مدى التغير الذي يمكن أن يحدث في جميع الموارد دفعة واحدة (simultaneous) مع المحافظة على الحل الأمثل كما هو أي الإبقاء على المتغيرات الأساسية في عمود القيم الأساسية دون تغيير ويسمى تحليل الحساسية هذا بتحليل الحساسية الآني (simultaneous sensitivity) أما التحليل الذي شرحناه فراداً في البداية فهو تحليل الحساسية الفردي (Individual sensitivity) والذي أعطى النتائج الآتية لحساسية كل مورد من الموارد:

$$-\frac{1}{10} \leq \delta_1 \leq 1$$

$$-\frac{3}{5} \leq \delta_2 \leq 6$$

$$-\frac{5}{7} \leq \delta_3 \leq 4$$

$$-\frac{3}{11} \leq \delta_4 \leq \infty$$



2- تحليل الحساسية عندما تتغير معاملات دالة الهدف:

ويقصد بتغير معاملات دالة الهدف أن يقل أو يزداد واحد أو أكثر من معاملات دالة الهدف بمقدار $(\delta)$ وحينذاك باستطاعة المتابع للبرنامج أن يتعرف على مدى حساسية هذا التغير على تعظيم أو تقليل الدالة.

لنأخذ المثال السابق:

$$\max z = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3$$

$$st. \quad x_1 \geq 2$$

$$7x_2 + 3x_3 \geq 9$$

$$4x_1 + x_2 + 2x_3 \quad \leq 10$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \quad \leq 8$$

$$x_1 \geq 0 \quad , x_2 \geq 0 \quad , x_3 \geq 0$$

والآن كيف نتعامل مع حل هذه المسألة لو افترضنا بأن معامل ($x_2$) في دالة الهدف تغير بمقدار $\delta$ ليصبح كالآتي $(2+\delta)$. دعنا ندخل المسألة بعد هذا التغير في جدول السمبلكس الابتدائي ونتابع الحل:

| B | V | x1 | x2 | x3 | s1 | s2 | s3 | s4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a1 | 2 | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 |
| a2 | 9 | 0 | 7 | 3 | 0 | -1 | 0 | 0 |
| s3 | 10 | 4 | 1 | 2 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| s4 | 8 | 2 | 3 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| Zj-Cj | 0 | -3 | $-2-\delta$ | -4 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Cj*-Gj | -11 | -1 | -7 | -3 | 1 | 1 | 0 | 0 |



وعند مواصلة حل هذا البرنامج نصل إلى جدول الحل الأمثل الذي يبدو كالآتي:

| B | V | x1 | x2 | x3 | s1 | s2 | s3 | s4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x1 | 2 | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 |
| x2 | $\frac{12}{11}$ | 0 | 1 | 0 | $-\frac{12}{11}$ | $-\frac{2}{11}$ | $-\frac{3}{11}$ | 0 |
| x3 | $\frac{5}{11}$ | 0 | 0 | 1 | $\frac{28}{11}$ | $\frac{1}{11}$ | $\frac{7}{11}$ | 0 |
| s4 | $\frac{3}{11}$ | 0 | 0 | 0 | $\frac{30}{11}$ | $\frac{5}{11}$ | $\frac{2}{11}$ | 1 |
| Zj-Cj | 10 | 0 | $0-\delta$ | 0 | 5 | 0 | 2 | 0 |

والآن توصلنا إلى الحل الأمثل ولكن هناك عقبة تكمن في وجود $(-\delta)$ في الصف $(Z_j-C_j)$ ولابد من التخلص منها من اجل استكمال متطلبات الحل الأمثل ويمكن ذلك عن طريق ضرب الصف $x_2$ بـ $(\delta)$ ومن ثم جمع الصف $(Z_j-C_j)$ معه وبذلك يصبح الصف $(Z_j-C_j)$ كما يلي:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Zj-Cj | $10+\frac{12}{11}\delta$ | 0 | 0 | 0 | $5-\frac{12}{11}\delta$ | $0-\frac{2}{11}\delta$ | $2-\frac{3}{11}\delta$ | 0 |

ولأجل المحافظة على الحل الأمثل كما في الجدول لا بد من توفر ما يلي:

$$5-\frac{12}{11}\delta \geq 0, \qquad 0-\frac{2}{11}\delta \geq 0, \qquad 2-\frac{3}{11}\delta \geq 0$$

$$\delta \leq \frac{55}{12} \qquad \delta \leq 0 \qquad \delta \leq \frac{22}{3}$$

وبذلك يكون مدى تغير $\delta$ كما يلي:

$$-\infty \leq \delta \leq 0$$

ويمكن حساب حساسية أي من المعاملات الفنية لدالة الهدف كل على انفراد أو جملة واحدة بعد إعطاء التغير في كل معامل رمزا خاصا به.

أن حساب وتحليل الحساسية مفيد جدا للعاملين في حقل التخطيط والإدارة الاقتصادية لكونه يوفر الوسيلة الكفوءة لتحديد مدى تأثر النتائج المستخرجة للبرامج من جراء التغيرات التي تحدث خارج عن الظروف المسيطر عليها أو التي يرغب المخطط أو الإداري أجراؤها على حجم موارده ومستلزمات إنتاجه أو على المعاملات الفنية لدالة الهدف والتي تمثل غالبا مقدار الربح لكل وحدة من الإنتاج المذكور وبهذا فإن تحليل الحساسية يساعد المخطط الإداري على أجراء المناورة الاقتصادية المطلوبة ضمن إطار الأهداف المرسومة.

## تمارين ( 1 - 7 )

**1- خذ البرنامج الخطي آلاتي:**

$$\min Z = 4x_1 + x_2 + 2x_3$$

$$s.t. \quad x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 4$$

$$3x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 6$$

$$2x_1 + x_2 + 4x_3 \geq 8$$

والمطلوب حل هذا البرنامج بطريقة السمبلكس المزدوجة.

**2- في إحدى المصانع التي تنتج ثلاثة منتجات هي النسيج الحريري والنسيج الصوفي والنسيج القطني كانت الموارد المتوفرة هي كالآتي:**

(8) مواد أولية و(10) أيدي عاملة و(6) مكائن وقد وضع الفنيون الاعتبارات الآتية لاستخدام هذه الموارد:



| نوع المورد | ما تستهلكه الوحدة الواحدة من المنتجات | | |
|---|---|---|---|
| | النسيج الحريري | النسيج الصوفي | النسيج القطني |
| موارد أولية | 4 | 1 | 1 |
| أيدي عاملة | 1 | 2 | 1 |
| مكائن | 1 | 2 | 2 |

فإذا كانت الأرباح المتوقعة عن بيع الوحدة الواحدة من أنواع النسيج المنتجة (1) للنسيج الحريري و(2) للنسيج الصوفي و(3) للنسيج القطني. والمطلوب:

( أ ) صياغة المسألة على شكل برنامج خطي.

(ب) إيجاد الحل الأمثل للمسألة.

(ج) بافتراض أن المكائن يمكن أن تتغير قيمتها بمقدار $\delta_1$ والأيدي العاملة بمقدار ( $\delta_2$ ).جد مقدار ( $\delta_1$ ) و( $\delta_2$ ) التي يمكن قبولها مع المحافظة على الحل الأمثل قائماً.

(د) بافتراض أن الأرباح المتوقعة للنسيج القطني قد تغيرت بمقدار ( $\delta$ ) احسب مقدار هذا التغير مع المحافظة على الحل الأمثل قائماً.

**3- أعطيت البرنامج الخطي الآتي:**

$$\max\ z = 2x_1 + 5x_2$$

$$s.t. \quad x_1 + 4x_2 \le 24$$

$$3x_1 + x_2 \le 21$$

$$x_1 + x_2 \le 9$$

$$x_1 \ge 1, x_2 \ge 2$$

( أ ) حل هذه المسالة مع ملاحظة القيود التي تحتوي على الحدود الدنيا.

(ب) أذا فرضت على المسألة حدودا عليا بدلاً من الدنيا وبالصيغة الآتية: ( $x_1 \le 5, x_2 \le 2$ ) جد الحل الأمثل للمسألة.

**4- إذا كان لدينا البرنامج المعلمي الآتي:**

$$\min \quad z = 5x_1 + 2x_2$$

$$s.t. \quad x_1 + 2x_2 \ge 7$$

$$2x_1 + x_2 \ge k$$

$$x_1 \ge 0 \quad , \quad x_2 \ge 0$$

**والمطلوب:**

( أ ) حل هذا البرنامج وإيجاد قيمة ( **k** ) التي تبقي على الحل الأمثل قائماً.

(ب) إذا حور البرنامج ليأخذ الصيغة الآتية:

$$\min \quad z = 5x_1 + Kx_2$$

$$s.t. \quad x_1 + 2x_2 \geq 7$$

$$2x_1 + x_2 \geq 10$$

$$x_1 \geq 0 \quad , \quad x_2 \geq 0$$

جد قيمة ( **k** ) التي تبقي على الحل الأمثل الذي تتوصل إليه.

# المصـادر


1- Alexander Schrijver, (Theory of Linear and Integer Programming), 1998.

2- Ales Cerny (Mathematical Techniques in Finance) ,2009.

3- Angel de la Fuente ,(Mathematical Methods and Models for Economists) ,2000.

4- Adam Ostaszewski, (Mathematics in Economics), 1993.

5- Akira Takayama,(Mathematical Economics) , 1985.

6- Avriel, Mordecai, (Nonlinear Programming: Analysis and Methods) ,2003.

7- Bôcher, Maxime,( Introduction to higher algebra),2004.

8- Bernd Gärtner, Jiří Matoušek , (Understanding and Using Linear Programming, ) 2006.

9- Bretscher, Otto ,(Linear Algebra with Applications (3rd ed.), Prentice Hall), 2005.

10- Bôcher, Maxime, (Introduction to higher algebra), 2004.

11- Baldani, James Bradfield, Robert Turner, (Mathematical Economics) , 2004.

12- Bazaraa, Mokhtar S. and Shetty, C. M. (Nonlinear programming. Theory and algorithms),1979.

13- Bretscher, Otto, (Linear Algebra with Applications (3rd ed.)), 2005.

14- Bertsekas, Dimitri P. (Nonlinear Programming: 2nd Edition), 1999.

15- Conrey, J. B.,( Ranks of elliptic curves and random matrix theory), 2007.

16- Christopher Clapham, James Nicholson, (The Concise Oxford Dictionary of Mathematics), 2005.

17- Cliff Huang, Philip S. Crooke, (Mathematics and Mathematica for Economists) ,1997.

18- Carl P. Simon, Lawrence Blume, (Mathematics for Economists) ,1994.

19- Morris C, Thanassoulis E ,(Essential Mathematics),1994.

20- Dimitri P. Bertsekas,(Nonlinear Programming: 2nd Edition),2004.

21- D. Zwillinger, (Handbook of Differential Equations ,3rd edition), 1997.

22- David Bailey ,(Mathematics in Economics) ,1998.

23- Dean Corbae, Maxwell B. Stinchcombe, Juraj Zeman ,(An Introduction to Mathematical Analysis for Economic), 2009.

24- Darrell A. Turkington (Mathematical Tools for Economics),2006.

25- E.L. Ince, (Ordinary Differential Equations), 1956 .

26- Edward T. Dowling, (Schaun's Outline of Introduction to Mathematical Economics) ,2000.

27- F. M. Wilkes, (Mathematics for Business) ,1999.

28- Godsil, Chris; Royle, Gordon,( Algebraic Graph Theory, Graduate Texts in Mathematics), 2004.

29- Geoff Renshaw (Maths for Economics), 2008.

30- Ian Jacques.( Mathematics for Economics and Business, Fifth Edition/ Difference Equations.), 2006.

31- Ian Jacques, (Mathematics for Economics Plus Mathxl Pack ) ,2009

32- Jeffrey Baldani, James Bradfield, Robert Turner, (Mathematical Economics) ,2004.

33- Jon Curwin, Roger Slater ,(Improve Your Maths: A Refresher Course ), 1999.

34- Jean Soper.,( Mathematics for Economics and Business: An Interactive Introduction), 2004.

35- Kenneth S. Miller, (Linear difference equations. ), 1968.

36- Ken Binmore, Joan Davies, (Calculus: Concepts and Methods ), 2002.

37- Ken Holden, Alan Pearson, (Introductory Mathematics for Economics and Business) ,1992.

38- Knut Sydsaeter, Peter Hammond, (Essential Mathematics for Economic Analysis) ,2002.

39- Lang, Serge,( Algebra, Graduate Texts in Mathematics), 2002.

40- Larson, Ron, Bruce H. Edwards,(Calculus,9th ed.), 2009.

41- Leighton Thomas .,(Using Mathematics in Economics) , 1999.

42- Martin Grötschel,( Linear and Integer Programming) 2006.

43- Mark de Berg, Marc van Kreveld, and Others,( Linear Programming, Computational Geometry ),2000.

44- Michael J. Todd, (The many facets of linear programming, Mathematical Programming) ,2002

45- McQuarrie, Donald A. ,(Mathematical Methods for Scientists and Engineers), 2003.

46- Martin Anthony, (Mathematics for Economics and Finance), 1996.

47- Michael W. Klein ,(Mathematical Methods for Economics), 2002.

48- . M.J. Rosser, (Basic Mathematics for Economists) ,2003.

49- Mik Wisniewski ,(Introductory Mathematical Methods in Economics ) ,1996.

50- Mik Wisniewski, (Quantitative Methods for Decision Makers) ,2002.

51- Martin Grötschel,( Linear and Integer Programming) ,2006.

52- Mark de Berg, Marc van Kreveld, and Others,( Linear Programming, Computational Geometry )2000.

53- Malcolm Pemberton, Nicholas Rau .,(Mathematics for Economists) , 2006.

54- M.J. Rosser .,(Basic Mathematics for Economists) , 2003.

55- Nocedal, Jorge, , Stephen J., (Numerical Optimization (2nd ed.), 2006.

56- Paul M. Batchelder,( An introduction to linear difference equations), 1967.

57- Peter Kahn, (Studying Mathematics and Its Applications), 2001.

58- Peter Temple, (First Steps In Economic Indicators) ,2002.

59- Rangarajan K. Sundaram, (A First Course in Optimization Theory) ,1996.

60- Rebecca Taylor, Simon Hawkins, (Mathematics for Economics and Business), 2008.

61- Rowen, Louis Halle, (Graduate Algebra), 2008.

62- Stewart , James, (Calculus: Early Transcendentals,6th ed) ,2008.

63- Steve Greenlaw ,(Doing Economics) ,2005.

64- Sheldon M. Ross, (An Elementary Introduction to Mathematical Finance),2002.

65- Shayle R. Searle, Lois Schertz Willett, (Matrix Algebra for Applied Economics) ,2001.

66- Stinson, Douglas R. (Cryptography, Discrete Mathematics and Its Applications), 2005.



67- Thomas, George B., Maurice D. Weir, Joel Hass, Frank R. Giordano (Calculus,11th ed),2008.

68- Teresa Bradley ,(Essential Mathematics for Economics and Business) ,2008.

69- V. Chandru and M.R.Rao,( Linear Programming), 1999.

70- Wolfram, Stephen,(The Mathematical Book/5th ed),2003.

71- Zabrodin, Anton; Brezin, Édouard; Kazakov, Vladimir; Serban, Didina; Wiegmann, Paul,( Applications of Random Matrices in Physics),2006.